A HOMBROS DE GIGANTES

LAS GRANDES OBRAS DE LA FÍSICA Y LA ASTRONOMÍA

EDICIÓN COMENTADA DE

STEPHEN HAWKING

Crítica

Primera edición: mayo de 2003
Segunda edición: octubre de 2003
Tercera edición: marzo de 2004
Cuarta edición: febrero de 2005

Título original:
ON THE SHOULDERS OF GIANTS
THE GREAT WORKS OF PHYSICS AND ASTRONOMY

Diseño de la cubierta: Bill Jones
Fotos de los autores: cortesía de Book Laboratory
Fotocomposición: Pacmer, S.A.

CRÍTICA, S. L., Diagonal, 662-664, 08034 Barcelona
e-mail: editorial@ed-critica.es
http://www.ed-critica.es

ISBN: 84-8432-435-4
Depósito legal: B. 5693-2005
Impreso y encuadernado en España por EGEDSA (Barcelona)

NOTA A ESTA EDICIÓN

David Jou ha traducido la Introducción a esta obra, así como los Agradecimientos y las presentaciones a la «Vida y obra» de Copérnico, Galileo, Newton y Einstein. Suya es también la versión española que actualiza la anotación de la obra de Copérnico, Galileo y Newton.

Respecto a los textos de los científicos aquí reunidos, nuestra edición parte de traducciones directas de sus respectivos originales, según se detalla a continuación:

Sobre las revoluciones de los orbes celestes, de Nicolás Copérnico, se editó por vez primera en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium*. La versión castellana que reproducimos se debe a Carlos Mínguez y Mercedes Testal y fue publicada con anterioridad por Editora Nacional en Madrid, 1982.

La primera impresión del *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, de Galileo Galilei, a cargo de Louis Elzevier apareció en Leiden en 1638 bajo el título *Discorsi e Dimostrazione Mathematiche intorno a due nuove scienze*. Nuestra edición sigue la que, elaborada por Carlos Solís y Javier Sádaba, fue publicada por Editora Nacional (*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Madrid, 1976).

De *Las armonías del mundo*, de Johannes Kepler, se ha seleccionado aquí el Libro V. La obra fue impresa en 1619 bajo el título *Harmonices Mundi*. La traducción castellana del original latino ha sido llevada a cabo por vez primera por José Luis Arántegui Tamayo.

Los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, de Isaac Newton, fueron publicados en 1687 bajo el título *Philosophicae naturalis principia mathematica*. La traducción castellana reproduce aquí la elaborada por Eloy Rada García y publicada por Alianza (Madrid, 1987).

De la obra de Albert Einstein se han seleccionado siete ensayos de la colección de artículos publicada en alemán bajo el título *Das Relativitätsprinzip* y recogida en *The Principles of Relativity: A Collection of Original Papers on the Special Theory of Relativity*, obra que reúne los trabajos de H.A. Lorenz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl (Teubner, Leipzig, 1922). La traducción castellana ha sido llevada a cabo por Javier García Sanz. Los dos primeros artículos reproducen la publicada previamente por Crítica en 2001. Los cinco restantes eran inéditos en castellano hasta hoy. Sus respectivos títulos originales, así como sus datos editoriales, pueden hallarse en nota a pie de página al inicio de cada uno de ellos.

AGRADECIMIENTOS

Este libro no habría sido posible sin la ayuda de mucha gente de talento que prestó su colaboración en diversas etapas del desarrollo de la obra. Entre los que merecen una gratitud especial se encuentran Michael Rosin, consultor de Running Press, Gil King, y la señora Karen Sime, ayudante del profesor Stephen Hawking.

También debemos expresar nuestra gratitud a diversos miembros pasados y presentes del equipo de Running Press: Carlo de Vito, Kathleen Greczylo, Kelly Pennick, Bill Jones y Deborah Grandinetti.

INTRODUCCIÓN

«Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes», escribió Isaac Newton a Robert Hooke en 1676. Aunque se refería a sus descubrimientos en óptica más que a sus trabajos, más importantes, sobre la gravitación y las leyes del movimiento, el comentario de Newton refleja adecuadamente cómo la ciencia, y de hecho el conjunto de la civilización, consiste en una serie de pequeños progresos, cada uno de los cuales se alza sobre los alcanzados anteriormente. Éste es el tema de este volumen fascinante, que utiliza textos originales para trazar la evolución de nuestra imagen del firmamento desde la revolucionaria propuesta de Nicolás Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol a la no menos revolucionaria de Albert Einstein de que el espacio y el tiempo son curvados y deformados por la masa y la energía. Es una historia impresionante, porque tanto Copérnico como Einstein han contribuido a cambiar profundamente la manera de ver nuestro lugar en el orden cósmico. Pasó nuestro lugar de privilegio en el centro del Universo, pasaron la eternidad y la certidumbre, y pasaron el espacio y el tiempo absolutos, sustituidos por láminas elásticas.

No sorprende que ambas teorías chocaran con una encarnizada oposición: la Inquisición en el caso de la teoría copernicana y el nazismo en el caso de la relatividad. Actualmente, tendemos a menospreciar como ingenua la antigua visión del universo de Aristóteles y Ptolomeo, en la cual la Tierra estaba en el centro del universo y el Sol giraba a su alrededor. Sin embargo, no deberíamos desdeñar demasiado su modelo, que no era en absoluto estúpido. Incorporaba la idea aristotélica de que la Tierra es una esfera y no una placa plana, y resultaba razonablemente preciso en su función principal, la de predecir las posiciones aparentes de los cuerpos celestes en el firmamento, con finalidades astrológicas. De hecho, resultaba casi tan preciso como la herética sugerencia formulada por Copérnico en 1543 de que la Tierra y los planetas giran en órbitas circulares alrededor del Sol.

Galileo encontró convincente la propuesta de Copérnico, no porque concordara mejor con las observaciones de las posiciones planetarias, sino por su simplicidad y elegancia, que contrastaban con los complicados epiciclos del modelo ptolemaico. En los *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* los personajes de Galileo, Salviati y Sagredo presentaban argumentos persuasivos a favor de la teoría de Copérnico. Pese a ello, su tercer personaje, Simplicio, aún podía defender a Aristóteles y Ptolomeo y sostener que en realidad la Tierra estaba en reposo y el Sol giraba a su alrededor.

De hecho, hasta que los trabajos de Kepler no dieron mayor precisión al modelo heliocéntrico y Newton no formuló las leyes del movimiento, el modelo geocéntrico no perdió toda su credibilidad. Ello supuso un gran cambio en nuestra visión del Universo: si no nos hallamos en el centro, ¿tiene nuestra existencia alguna importancia? ¿Por qué Dios o las leyes de la naturaleza deben preocuparse por lo que ocurre en la tercera roca que gira alrededor del Sol, que es donde nos dejó Copérnico? Los científicos modernos han ido mucho más allá que Copérnico en su búsqueda de una descripción del universo en que el hombre (en el antiguo sentido anterior a lo políticamente correcto) no jugara ningún papel. Aunque esta manera de abordar el problema ha conseguido descubrir leyes objetivas impersonales que rigen el universo, no ha explicado, al menos por ahora, por qué el universo es como es en lugar de ser uno de los muchos otros posibles universos que también serían consistentes con estas leyes.

Algunos científicos pretenden que esta limitación es tan sólo provisional, y que cuando descubramos la teoría unificada definitiva, ésta prescribirá de forma única el estado del universo, la intensidad de la gravitación, la masa y la carga del electrón, y muchas otras constantes por el estilo. Sin embargo, muchas características del universo (como por ejemplo el hecho de que estemos en el tercer planeta, en vez de en el segundo o en el cuarto) parecen arbitrarias y accidentales más que ser predicciones de una ecuación maestra. Mucha gente (incluido yo mismo) cree que la aparición de un universo tan complejo y estructurado requiere invocar el llamado principio antrópico, que nos vuelve a situar en la posición central que hemos tenido la modestia de rechazar desde la época de Copérnico. El principio antrópico se basa en el hecho evidente de que no estaríamos preguntándonos por la naturaleza del Universo si éste no hubiera contenido estrellas, planetas y compuestos químicos estables, entre otros prerrequisitos de vida (¿inteligente?) tal como la que conocemos. Si la teoría definitiva hiciera una predicción única para el estado y el contenido del Universo, sería una coincidencia muy notable que este estado se hallara en el diminuto subconjunto de estados compatibles con la vida.

Sin embargo, la obra del último pensador de este volumen, Albert Einstein, abre una nueva posibilidad. Einstein desempeñó un papel muy importante en el desarrollo de la teoría cuántica, según la cual un sistema no tiene una sola historia, como acostumbramos a pensar, sino muchas historias posibles, cada una con una cierta probabilidad. Einstein, además, fue casi el único responsable de la teoría general de la relatividad, en la que el espacio y el tiempo se curvan y se convierten en entidades dinámicas. Esto significa que están sujetos a la teoría cuántica, y que el mismo Universo tiene todas las formas y todas las historias posibles. La mayoría de ellas sería completamente inadecuada para el desarrollo de la vida, pero unas pocas reúnen todas las condiciones necesarias para ello. No importa que estos pocos universos tengan una probabilidad muy baja respecto a los demás: los universos sin vida no tendrían a nadie que los observara. Es suficiente que haya al menos una historia en que se desarrolle la vida, de la cual nosotros somos una evidencia, aunque no lo seamos de inteligencia. Newton dijo que había subido a hombros de gigantes. Pero tal como este volumen ilustra muy bien, nuestra comprensión no avanza tan sólo edificando lenta y continuamente a partir de los trabajos anteriores. Algunas veces, como ocurrió con Copérnico o con Einstein, tenemos que hacer un salto intelectual a una nueva visión del mundo. Quizá Newton debería haber dicho «usé hombros de gigantes como trampolín».

Nicolás Copérnico

(1473-1543)

VIDA Y OBRA

Nicolás Copérnico, clérigo y matemático polaco, es considerado generalmente como el fundador de la astronomía moderna. Este honor le es atribuido porque fue el primero en llegar a la conclusión de que los planetas y el Sol no giraban alrededor de la Tierra. Ciertamente, especulaciones referentes a un universo heliocéntrico (centrado en el Sol) existían ya desde la época de Aristarco (fallecido hacia el 230 a.C.), pero la idea no fue examinada seriamente antes de Copérnico. Aun así, para comprender las contribuciones de Copérnico es importante tener presentes las implicaciones religiosas y culturales de este descubrimiento científico en su época.

Hacia el siglo IV a.C., el pensador y filósofo griego Aristóteles (382-322 a.C.) ideó un sistema planetario en su libro *Sobre los cielos* (*De caelo*), y concluyó que como la sombra de la Tierra sobre la Luna durante los eclipses siempre es redonda, el mundo es esférico en vez de plano. También dedujo esta forma redonda de la Tierra a partir de la observación de que, cuando miramos alejarse un velero en el mar, antes desaparece por el horizonte el casco que las velas.

En la visión geocéntrica de Aristóteles, la Tierra estaba en reposo y los planetas Mercurio, Venus, Marte, Júpiter y Saturno, además de la Luna y el Sol, describían órbitas circulares a su alrededor. Aristóteles creía también que las estrellas estaban fijadas a la esfera celestial, y su idea del tamaño del universo atribuía a estas estrellas fijas una distancia no mucho mayor que la órbita de Saturno. Creía en movimientos perfectamente circulares, y tenía buenos motivos para creer que la Tierra estaba en reposo. Una piedra que cae desde una torre lo hace verticalmente, en vez de desviarse hacia el oeste, como hubiera sido de esperar si la Tierra girara de oeste a este (Aristóteles no consideró que la piedra pudiera participar de la rotación de la Tierra). En un intento de combinar la física con la metafísica, Aristóteles propuso su teoría del «primer motor», que suponía que una fuerza mística más allá de las estrellas fijas producía los movimientos circulares que observamos. Este modelo de universo fue aceptado y abrazado por los teólogos, que interpretaron a menudo los primeros motores como ángeles, y la visión

de Aristóteles duró muchos siglos. Muchos estudiosos modernos creen que la aceptación universal de esta teoría por parte de las autoridades religiosas dificultó el progreso de la ciencia, ya que poner en duda las teorías aristotélicas era poner en entredicho la autoridad de la propia iglesia.

Cinco siglos tras la muerte de Aristóteles, un egipcio llamado Claudio Ptolomeo (87-150 d.C.) propuso un modelo de universo que predecía con mayor precisión los movimientos y las acciones de las esferas en el firmamento. Tal como Aristóteles, Ptolomeo creía que la Tierra estaba en reposo, y razonó que los objetos caen hacia el centro de la Tierra porque ésta debe estar inmóvil en el centro del universo. Ptolomeo llegó a elaborar un sistema en que los cuerpos celestes se movían alrededor de la circunferencia de sus epiciclos (un círculo en que el planeta se mueve y cuyo centro se desplaza simultáneamente a lo largo de un círculo de radio mayor). Para lograrlo, supuso la Tierra ligeramente separada del centro del universo y llamó «equante» a este nuevo centro (un punto imaginario que le ayudaba a tener en cuenta los movimientos planetarios observables). Ajustando convenientemente los tamaños de los círculos, Ptolomeo logró predecir los movimientos de los cuerpos celestes. La cristiandad tuvo pocos problemas con el modelo geocéntrico ptolemaico, que dejaba espacio en el universo, más allá de las estrellas fijas, para acomodar un cielo y un infierno, de manera que la Iglesia adoptó este modelo del universo como una verdad establecida.

La imagen aristotélica y ptolemaica del cosmos reinó, con pocas modificaciones significativas, durante más de mil años. No fue hasta 1514 que el sacerdote polaco Nicolás Copérnico revivió el modelo heliocéntrico del universo. Copérnico lo propuso meramente como un modelo para calcular las posiciones de los planetas porque temía que la Iglesia le tachara de hereje si lo proponía como una auténtica descripción de la realidad. A través de sus estudios de los movimientos planetarios, Copérnico llegó a convencerse de que la Tierra era un planeta más y que el Sol estaba en el centro del universo, hipótesis que se conoce como modelo heliocéntrico. La ruptura de Copérnico marcó uno de los mayores cambios de paradigma que ha habido en la historia, abrió el camino a la astronomía moderna y afectó ampliamente a la ciencia, la filosofía y la religión. El anciano clérigo dudaba si divulgar su teoría, ya que no quería irritar a las autoridades eclesiásticas, por lo cual sólo mostró su libro a unos pocos astrónomos. La obra cumbre de Copérnico, *De revolutionibus*, fue publicada cuando se hallaba en su lecho de muerte, en 1543. No vivió lo suficiente para ser testigo del caos que provocaría su teoría heliocéntrica.

Copérnico nació el 19 de febrero de 1473 en Torun, Polonia, en una familia de mercaderes y oficiales municipales que otorgaban una elevada prioridad a la educación. Su tío, Lucas Watzenrode, príncipe-obispo de Ermland, se aseguró de que su sobrino recibiera la mejor formación académica disponible en Polonia. En 1491, Copérnico ingresó en la Universidad de Cracovia, donde siguió una carrera de estudios generales durante cuatro años, antes de viajar a Italia para estudiar derecho y medicina, tal como era habitual en las élites polacas en aquel tiempo. Durante sus estudios en la Universidad de Bolonia (donde llegó a ser profesor de astronomía) Copérnico se alojaba en la casa de Domenico Maria de Novara, el famoso matemático de quien llegó a ser discípulo. Novara era crítico con Ptolomeo, cuya astronomía del siglo segundo contemplaba con escepticismo. En noviembre de 1500, Copérnico observó un eclipse de luna en Roma. Aunque pasó en Italia algunos años más estudiando medicina, nunca perdió su pasión por la astronomía.

Tras recibir el grado de doctor en derecho canónico, Copérnico ejerció la medicina en la corte episcopal de Heilsberg, donde vivía su tío. La realeza y los altos clérigos requerían sus servicios médicos, pero Copérnico dedicó la mayor parte de su tiempo al servicio de los pobres. En 1503 regresó a Polonia y se trasladó al palacio episcopal de su tío en Lidzbark Warmisnki. Allí, se ocupó de los asuntos administrativos de la diócesis y de hacer de asesor de su tío. Tras el fallecimiento de éste en 1512, Copérnico se desplazó definitivamente a Frauenburg y hubiera dedicado el resto de su vida al servicio eclesiástico, pero el estudioso en matemáticas, medicina y teología que había en él estaba tan sólo al inicio del trabajo que le haría famoso.

En marzo de 1513, Copérnico adquirió ochocientos bloques de piedra y un barril de cal para construir una torre de observación, en la cual utilizó instrumentos astronómicos como cuadrantes, palácticos y astrolabios para observar el Sol, la Luna y las estrellas. El año siguiente, escribió un breve *Comentario sobre las teorías de los movimientos de los objetos celestes a partir de sus disposiciones* (*De hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus*), pero rehusó publicar el manuscrito y sólo lo hizo circular discretamente entre unos pocos amigos de confianza. El *Comentario* fue un primer intento de proponer una teoría astronómica en que la Tierra se mueve y el Sol permanece en reposo. Copérnico no estaba satisfecho con el sistema astronómico aristotélico-ptolemaico que había dominado Occidente durante siglos. Opinaba que el centro de la Tierra no era el centro del universo, sino tan sólo el centro de la órbita de la Luna. Copérnico había llegado a la conclusión de que las perturbaciones aparentes en los movimientos observables de los planetas resultaban de la propia rotación de la Tierra alrededor de su eje y de su desplazamiento a lo largo de su órbita. «Giramos alrededor del Sol», concluyó en su *Comentario*, «como todos los demás planetas.»

A pesar de las especulaciones de Aristarco sobre un universo heliocéntrico, ya en el siglo III a.C., los teólogos y los intelectuales se sentían más a gusto con una teoría geocéntrica, premisa que nunca fue puesta seriamente en tela de juicio. Prudentemente, Copérnico se abstuvo de desvelar sus opiniones en público y prefirió ir desarrollando en silencio sus ideas, efectuando cálculos minuciosos y trazando sofisticados diagramas, y evitó que sus teorías circularan fuera de un selecto círculo de amistades. Cuando, en 1514, el papa León X requirió al obispo Paolo de Fossombrone que pidiera a Copérnico su opinión sobre la reforma del calendario eclesiástico, el astrónomo polaco replicó que el conocimiento de los movimientos del Sol y de la Tierra con respecto a la longitud del año era insuficiente para poder ser tenido en cuenta en una reforma. El reto debió preocupar a Copérnico, sin embargo, ya que posteriormente escribió al papa Paulo III, el que encargó a Miguel Ángel que pintara la capilla Sixtina, algunas observaciones relevantes que sirvieron para establecer los fundamentos del calendario gregoriano setenta años después.

Aun así, Copérnico temía exponerse a las iras del público y de la Iglesia, y pasó varios años trabajando en privado para corregir y ampliar el *Comentario*. El resultado fue *Sobre las revoluciones de los orbes celestes* (*De revolutionibus orbium coelestium*) que completó en 1530, pero cuya publicación retrasó durante trece años. El riesgo de una condena eclesiástica no era, sin embargo, la única razón de sus dudas respecto de la publicación, sino que era un perfeccionista y consideraba que sus observaciones debían ser verificadas y revisadas una y otra vez. Continuó enseñando los principios de su teoría planetaria, incluso en presencia del papa Clemente VII, que aprobó sus trabajos. En 1536, Clemente le pidió formalmente que publicara sus teorías, pero fue necesario

que un antiguo alumno de veinticinco años, el alemán Georg Joachim Rheticus, que dejó su cátedra de matemáticas en Wittemberg para poder estudiar con Copérnico, persuadiera a su maestro a que publicara *De revolutionibus*. En 1540, Rheticus colaboró en la edición de la obra y entregó el manuscrito a un impresor luterano de Nuremberg, dando así comienzo a la revolución copernicana.

Cuando *De revolutionibus* apareció en 1543, fue atacado por teólogos protestantes que mantenían que un universo heliocéntrico iba contra la Biblia. Argüían que las teorías de Copérnico podrían hacer que la gente creyera que eran una simple pieza de un orden natural y no los dueños de la naturaleza, ni el centro alrededor del cual se ordena toda ella. Debido a esta oposición clerical, y quizá también por la incredulidad general que suscitaba un universo que no fuera geocéntrico, entre 1543 y 1600 menos de una decena de científicos aceptaron la teoría copernicana. Además, Copérnico no hizo nada por resolver el mayor problema con que se enfrentaba cualquier sistema en que la Tierra girara alrededor de su eje (y orbitara alrededor del Sol), a saber, por qué los cuerpos terrestres permanecen sobre la Tierra que gira. La respuesta fue propuesta por Giordano Bruno, un científico italiano, copernicano declarado, que sugirió que el espacio podría no tener límites y que el sistema solar podría ser uno entre muchos otros sistemas en el universo. Bruno también desarrolló algunas ideas puramente especulativas de astronomía que Copérnico no había explorado en *De revolutionibus*. En sus escritos y conferencias, el científico italiano sostenía que en el universo había infinitos mundos habitados por vida inteligente, algunos de los cuales, quizá, con seres superiores a los humanos. Esta audacia puso a Bruno en el punto de mira de la Inquisición, que lo juzgó y condenó por sus creencias heréticas. Fue quemado en la hoguera en 1600.

En conjunto, sin embargo, el libro de Copérnico no tuvo un impacto inmediato sobre los estudios astronómicos modernos. En *De revolutionibus*, Copérnico no propuso en realidad un sistema heliocéntrico, sino más bien un sistema heliostático. Consideró que el Sol no estaba exactamente en el centro del universo, sino tan sólo próximo al centro, para poder dar razón de las variaciones observadas en la retrogresión y el brillo. Sostenía que la Tierra describía cada día un giro completo alrededor de su eje y que daba una vuelta al Sol cada año. En la primera de las seis secciones del libro, se opuso al modelo ptolemaico, que situaba todos los cuerpos celestes en órbita alrededor de la tierra, y estableció el orden heliocéntrico correcto: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno (los seis planetas conocidos en aquel tiempo). En la segunda sección, utilizó las matemáticas (es decir, epiciclos y equantes) para explicar los movimientos de las estrellas y los planetas, y razonó que el movimiento del sol coincidía con el de la tierra. La tercera sección proporciona una explicación matemática de la precesión de los equinoccios, que Copérnico atribuye a la rotación de la Tierra alrededor de su eje. Las secciones restantes de *De revolutionibus* están dedicadas a los movimientos de los planetas y de la luna.

Copérnico fue el primero que situó correctamente Venus y Mercurio, y estableció con notable precisión el orden y la distancia de los planetas conocidos. Consideró estos dos planetas (Venus y Mercurio) como los más próximos al Sol, y observó que giran más rápidamente, y en el interior de la órbita de la Tierra.

Antes de Copérnico, se creía que el Sol era otro planeta. Situar el Sol en el centro virtual del sistema planetario fue el punto de partida de la revolución copernicana. Al apartar la Tierra del centro del universo, donde se suponía que anclaba todos los cuerpos celestes, Copérnico se vio obligado a preguntarse por las teorías de la gravedad.

Las explicaciones precopernicanas de la gravitación habían imaginado un único centro de gravedad (la Tierra), pero Copérnico arguyó que cada cuerpo celeste podría tener sus propias cualidades gravitacionales y sostuvo que, en cada uno de ellos, los objetos pesados tendían hacia su centro. Esta visión condujo finalmente a la teoría de la gravitación universal, pero su impacto no fue inmediato.

En 1543, Copérnico sufrió una parálisis del lado derecho y se fue debilitando física y mentalmente. El declarado perfeccionista que era no tuvo otra opción que abandonar el control de su manuscrito, *De revolutionibus*, en las últimas etapas de impresión. Confió el manuscrito a su alumno, Georg Rheticus, pero cuando éste se vio obligado a dejar Nuremberg, el manuscrito cayó en manos del teólogo luterano Andreas Osiander. Éste, esperando apaciguar a los partidarios de la teoría geocéntrica, introdujo algunas alteraciones sin el conocimiento y consentimiento de Copérnico: introdujo la palabra «hipótesis» en la portada, borró párrafos importantes y añadió frases que diluían el impacto y la certeza de la obra. Se dice que Copérnico recibió un ejemplar de su libro impreso en Frauenburg, en su lecho de muerte, sin darse cuenta de las revisiones de Osiander. Sus ideas permanecieron en una relativa oscuridad durante casi cien años, pero el siglo XVII vio como gente de la talla de Galileo Galilei, Johannes Kepler e Isaac Newton construían teorías de universos heliocéntricos, aparcando definitivamente las ideas aristotélicas. Muchos han escrito sobre el modesto sacerdote polaco que cambió nuestra manera de ver el universo, pero puede que sea Johann Wolfgang von Goethe, el gran escritor y científico alemán, quien más elocuentemente ha escrito sobre las contribuciones de Copérnico:

> De todas las opiniones y descubrimientos, ninguna debe haber ejercido mayor efecto sobre el espíritu humano que la doctrina copernicana. Apenas el mundo había sido considerado como redondo y completo en sí mismo, cuando se le pidió que renunciara al tremendo privilegio de ser el centro del universo. Quizá nunca se haya hecho una petición tan exigente a la humanidad, ya que, al admitirla, tantas cosas se desvanecían en humo y niebla. ¿Qué se hizo del Edén, nuestro mundo de inocencia, piedad y poesía?; ¿qué se hizo del testimonio de los sentidos, de las convicciones de una fe poético-religiosa? No sorprende que sus contemporáneos rehusaran perder todo esto y presentaran toda la resistencia posible a una doctrina que autorizaba y exigía de sus conversos una libertad de miras y una grandeza de pensamiento desconocidas, ni tan siquiera soñadas, hasta entonces.

JOHANN WOLFGANG VON GOETHE

SOBRE LAS REVOLUCIONES DE LOS ORBES CELESTES

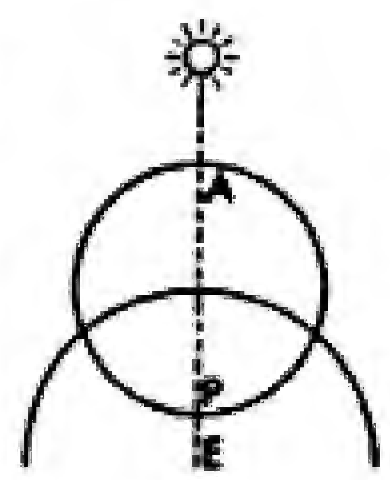
INTRODUCCIÓN

AL LECTOR SOBRE LAS HIPÓTESIS DE ESTA OBRA[1]

Divulgada ya la fama acerca de la novedad de las hipótesis de esta obra, que considera que la Tierra se mueve y que el Sol está inmóvil en el centro del universo, no me extraña que algunos eruditos se hayan ofendido vehementemente y consideren que no se deben modificar las disciplinas liberales constituidas correctamente ya hace tiempo. Pero si quieren ponderar la cuestión con exactitud, encontrarán que el autor de esta obra no ha cometido nada por lo que merezca ser reprendido. Pues es propio del astrónomo calcular la historia de los movimientos celestes con una labor diligente y diestra. Y además concebir y configurar las causas de estos movimientos, o sus hipótesis, cuando por medio de ningún proceso racional puede averiguar las verdaderas causas de ellos. Y con tales supuestos pueden calcularse correctamente dichos movimientos a partir de los principios de la geometría, tanto mirando hacia el futuro como hacia el pasado. Ambas cosas ha establecido este autor de modo muy notable. Y no es necesario que estas hipótesis sean verdaderas, ni siquiera que sean verosímiles, sino que se basta con que muestren un cálculo coincidente con las observaciones, a no ser que alguien sea tan ignorante de la geometría o de la óptica que tenga por verosímil el epiciclo de Venus, o crea que ésa es la causa por la que precede unas veces al Sol y otras le sigue en cuarenta grados o más. ¿Quién no advierte, supuesto esto, que necesariamente se sigue que el diámetro de la estrella en el perigeo es más de cuatro veces mayor, y su cuerpo más de dieciséis veces mayor de lo que aparece en el apogeo, a lo que, sin embargo, se opone la experiencia de cualquier edad?[2] También en esta disciplina hay cosas no menos absurdas o que en este momento no es necesario examinar. Está suficien-

1. Se cree que este prólogo, atribuido inicialmente a Copérnico, fue escrito en realidad por Andreas Osiander, un teólogo luterano y amigo de Copérnico, que vio *De revolutionibus* en la prensa.

2. Ptolomeo hace que Venus se mueva en un epiciclo la razón de cuyo radio al radio del círculo excéntrico que transporta al epiciclo es aproximadamente de tres a cuatro. Por consiguiente, sería de esperar que la magnitud aparente del planeta variara con la variación de su distancia a la Tierra, en las proporciones apuntadas por Osiander.



Además, se halló que, si el planeta estaba sobre el epiciclo, la posición media del Sol aparecía alineada con EPA. Por lo tanto, dadas las razones del epiciclo y de la excéntrica, Venus nunca debería aparecer desde la Tierra a una distancia angular demasiado superior a 40 grados del centro de su epiciclo, es decir, de la posición media del Sol, tal como se observa.

temente claro que este arte no conoce completa y absolutamente las causas de los movimientos aparentes desiguales. Y si al suponer algunas, y ciertamente piensa muchísimas, en modo alguno suponga que puede persuadir a alguien [en que son verdad], sino tan sólo para establecer correctamente el cálculo. Pero ofreciéndose varias hipótesis sobre uno solo y el mismo movimiento (como la excentricidad y el epiciclo en el caso del movimiento del Sol) el astrónomo tomará la que con mucho sea más fácil de comprender. Quizá el filósofo busque más la verosimilitud, pero ninguno de los dos comprenderá o transmitirá nada cierto, a no ser que le haya sido revelado por la divinidad. Por lo tanto, permitamos que también estas nuevas hipótesis se den a conocer entre las antiguas, no como más verosímiles, sino porque son al mismo tiempo admirables y fáciles y porque aportan un gran tesoro de sapientísimas observaciones. Y no espere nadie, en lo que respecta a las hipótesis, algo cierto de la astronomía, pues no puede proporcionarlo; para que no salga de esta disciplina más estúpido de lo que entró, si toma como verdad lo imaginado para otro uso. Adiós.

PREFACIO Y DEDICATORIA AL PAPA PAULO III

Santísimo Padre, puedo estimar suficientemente lo que sucederá en cuanto algunos aprecien, en estos libros míos, que he escrito acerca de las revoluciones de las esferas del mundo, que atribuyo al globo de la Tierra algunos movimientos y clamarán para desaprobarme por tal opinión. Pues no me satisfacen hasta tal punto mis opiniones, como para no apreciar lo que otros juzguen de ellas. Y aunque sé que los pensamientos del hombre filósofo están lejos del juicio del vulgo, sobre todo porque su afán es buscar la verdad en todas las cosas, en cuanto esto le ha sido permitido por Dios a la razón humana; sin embargo, considero que debe huirse de las opiniones extrañas que se apartan de lo justo. Y así, al pensar yo conmigo mismo, cuán absurdo estimarían el ἀκρόαμα [esta cantinela] aquellos que, por el juicio de muchos siglos, conocieran la opinión confirmada de que la Tierra inmóvil está colocada en medio del cielo como su centro, si yo, por el contrario, asegurara que la Tierra se mueve, entonces largo tiempo dudé en mi interior, si dar a la luz mis comentarios escritos sobre la demostración de ese movimiento o si, por el contrario, sería suficiente seguir el ejemplo de los pitagóricos y de algunos otros, que no por escrito, sino oralmente, solían trasmitir los misterios de su filosofía únicamente a amigos y próximos, como testifica Lysis en su carta a Hiparco. Pero a mí me parece que no hicieron esto, como juzgan algunos, por un cierto recelo a comunicar sus doctrinas, sino para que asuntos tan bellos, investigados con mucho estudio por los grandes hombres, no fueran despreciados por quienes les da pereza el dedicar algún trabajo a las letras, excepto a lo lucrativo, o si, siendo excitados por las exhortaciones y el ejemplo de otros hacia el estudio liberal de la filosofía, por la estupidez de su ingenio se movieran entre los filósofos como los zánganos entre las abejas. Considerando, pues, conmigo mismo estas cosas, el desprecio que yo debía temer a causa de la novedad y absurdo de mi opinión, casi me había empujado a interrumpir la obra ya organizada.

Pero los amigos me hicieron cambiar de opinión, a mí que durante tanto tiempo dudaba y me resistía. Entre ellos fue el primero Nicolás Schönberg, cardenal de Capua, célebre en todo género de saber. Próximo a él estuvo mi muy querido e insigne Tiedemann Giese, obispo de Culm, estudiosísimo de las letras sagradas, así como también de todo buen saber. Éste me exhortó muchas veces, y añadiendo con frecuencia los reproches,

insistió para que publicara este libro y le dejara salir a la luz, pues retenido por mí había estado en silencio, no sólo nueve años, sino ya cuatro veces nueve. A lo mismo me impulsaron otros muchos varones eminentes y doctos, exhortándome para que no me negara durante más tiempo, a causa del miedo concebido, a presentar mi obra para la común utilidad de los estudiosos de las matemáticas. Decían que, cuanto más absurda pareciera ahora a muchos esta doctrina mía sobre el movimiento de la Tierra, tanta más admiración y favor tendría después de que, por la edición de mis comentarios, vieran levantada la niebla del absurdo por las clarísimas demostraciones. En consecuencia, convencido por aquellas persuasiones y con esta esperanza, permití a mis amigos que hiciesen la edición de la obra que me habían pedido tanto tiempo.

Y quizá, Vuestra Santidad no admirará tanto el que me haya atrevido a sacar a la luz estas lucubraciones, después de tomarme tanto trabajo en elaborarlas, como el que no haya dudado en poner por escrito mis pensamientos sobre el movimiento de la Tierra. Pero lo que más esperará oír de mí es, qué me pudo haber venido a la mente para que, contra la opinión recibida de los matemáticos e incluso contra el sentido común, me haya atrevido a imaginar algún movimiento de la Tierra. Y así, no quiero ocultar a Vuestra Santidad, que ninguna otra cosa me ha movido a meditar sobre otra relación [estructura] para deducir los movimientos de las esferas del mundo, sino el hecho de comprender que los matemáticos no están de acuerdo con aquellas investigaciones. Primero, porque estaban tan inseguros sobre el movimiento del Sol y de la Luna que no podía demostrar ni observar la magnitud constante de la revolución anual. Después, porque al establecer los movimientos, no sólo de aquéllos, sino también de las otras cinco estrellas errantes, no utilizan los mismos principios y supuestos, ni las mismas demostraciones en las revoluciones y movimientos aparentes. Pues unos utilizan sólo círculos homocéntricos, otros, excéntricos y epiciclos, con los que no consiguen plenamente lo buscado. Pues los que confían en los homocéntricos, aunque hayan demostrado algunos movimientos diversos de los que pueden componerse, no pudieron deducir de ello nada tan seguro que respondiera sin duda a los fenómenos. Mas los que pensaron en los excéntricos, aunque en gran parte parecían haber resuelto los movimientos aparentes por medio de cálculos congruentes con ellos, sin embargo admitieron entre tanto muchas cosas que parecen contravenir los primeros principios acerca de la regularidad del movimiento. Tampoco pudieron hallar o calcular partiendo de ellos lo más importante, esto es, la forma del mundo y la simetría exacta de sus partes, sino que les sucedió como si alguien tomase de diversos lugares manos, pies, cabeza y otros miembros auténticamente óptimos, pero no representativos en relación a un solo cuerpo, no correspondiéndose entre sí, de modo que con ellos se compondría más un monstruo que un hombre. Y así, en el proceso de demostración que llaman «método» olvidaron algo de lo necesario, o admitieron algo ajeno, o que no pertenece en modo alguno al tema. Y esto no les hubiese sucedido en modo alguno, si hubieran seguido principios seguros. Pues si las hipótesis supuestas por ellos no fueron falsas, todo lo que de ellas se deduce se podría verificar sin lugar a dudas. Y aunque lo que ahora digo es oscuro, en su lugar se hará claro.

En consecuencia, reflexionando largo tiempo conmigo mismo sobre esta incertidumbre de las matemáticas transmitidas para calcular los movimientos de las esferas del mundo, comenzó a enojarme que a los filósofos, que en otras cuestiones han estudiado tan cuidadosamente las cosas más minuciosas de ese orbe, no les constara ningún cálculo seguro sobre los movimientos de la máquina del mundo, construida para nosotros

por el mejor y más regular artífice de todos. Por lo cual, me esforcé en releer los libros de todos los filósofos que pudiera tener, para indagar si alguno había opinado que los movimientos de las esferas eran distintos a los que suponen quienes enseñan matemáticas en las escuelas. Y encontré en Cicerón que Niceto fue el primero en opinar que la Tierra se movía. Después, también en Plutarco encontré que había algunos otros de esa opinión, cuyas palabras, para que todos las tengan claras, me pareció bien transcribir:

> Algunos piensan que la Tierra permanece quieta, en cambio Filolao el Pitagórico dice que se mueve en un círculo oblicuo alrededor del fuego, de la misma manera que el Sol y la Luna. Heráclides el del Ponto y Ecfanto el Pitagórico piensan que la Tierra se mueve pero no con traslación, sino como una rueda, alrededor de su propio centro, desde el ocaso hasta el orto.[1]

En consecuencia, aprovechando esa ocasión empecé yo también a pensar sobre la movilidad de la Tierra. Y aunque la opinión parecía absurda, sin embargo, puesto que sabía que a otros se les había concedido tal libertad antes que a mí, de modo que representaban algunos círculos para demostrar los fenómenos de los astros, estimé que fácilmente se me permitiría experimentar, si, supuesto algún movimiento de la Tierra, podrían encontrarse en la revolución de las órbitas celestes demostraciones más firmes que lo eran las de aquéllos.

Y yo, supuestos así los movimientos que más abajo en la obra atribuyo a la Tierra, encontré con una larga y abundante observación que, si se relacionan los movimientos de los demás astros errantes con el movimiento circular de la Tierra, y si los movimientos se calculan con respecto a la revolución de cada astro, no sólo de ahí se siguen los fenómenos de aquéllos, sino que también el orden y magnitud de los astros y de todas las órbitas, e incluso el cielo mismo, se ponen en conexión; de tal modo que en ninguna parte puede cambiarse nada, sin la confusión de las otras partes y de todo el universo. De ahí también, que haya seguido en el transcurso de la obra este orden, de modo que en el libro primero describiré todas las posiciones de las órbitas con los movimientos que le atribuyo a la Tierra, de modo que ese libro contenga como la constitución común del universo. Después, en los restantes libros, relaciono los movimientos de los demás astros y de todas las órbitas con la movilidad de la Tierra, para que de ahí pueda deducirse en qué medida los movimientos y apariencias de los demás astros y órbitas pueden salvarse, si se relacionan con el movimiento de la Tierra. No dudo que los ingeniosos y doctos matemáticos concordarán conmigo, si, como la filosofía exige en primer lugar, quisieran conocer y explicar, no superficialmente sino con profundidad, aquello que para la demostración de estas cosas ha sido realizado por mí en esta obra. Pero, para que tanto los doctos como los ignorantes por igual vieran que yo no evitaba el juicio de nadie, preferí dedicar estas lucubraciones a Vuestra Santidad antes que a cualquier otro, puesto que también en este remotísimo rincón de la Tierra, donde yo vivo, sois considerado como eminentísimo por la dignidad de vuestra orden y también por vuestro amor a todas las letras y a las matemáticas, de modo que fácilmente con vuestra autoridad y juicio podéis reprimir las mordeduras de los calumniadores, aunque está en el proverbio que no hay remedio contra la mordedura de un sicofante.

Si por casualidad hay ματαιολόγοι [charlatanes] que, aun siendo ignorantes de todas las matemáticas, presumen de un juicio sobre ellas por algún pasaje de las Escritu-

1. *De placitis philosophorum*, III, 13.

ras, malignamente distorsionado de su sentido, se atrevieran a rechazar y atacar esta estructuración mía, no hago en absoluto caso de ellos, hasta el punto de que condenaré su juicio como temerario. Pues no es desconocido que Lactancio, por otra parte célebre escritor, aunque matemático mediocre, habló puerilmente de la forma de la Tierra, al reírse de los que transmitieron que la Tierra tiene forma de globo. Y así, no debe parecernos sorprendente a los estudiosos, si ahora otros de esa clase se ríen de nosotros. Las matemáticas se escriben para los matemáticos, a los que estos trabajos nuestros, si mi opinión no me engaña, les parecerán que aportan algo a la república eclesiástica, cuyo principado tiene ahora Vuestra Santidad. Pues así, no hace mucho, bajo León X, en el concilio de Letrán, cuando se trataba de cambiar el calendario eclesiástico, todo quedó indeciso únicamente a causa de que las magnitudes de los años y de los meses y los movimientos del Sol y de la Luna aún no se consideraban suficientemente medidos. Desde ese momento dediqué mi ánimo a observar estas cosas con más cuidado, estimulado por el muy preclaro varón Pablo, obispo de Fossombrone, que entonces estaba presente en estas deliberaciones. Pero lo que he proporcionado en esta materia, lo dejo al juicio principalmente de Vuestra Santidad y de todos los demás sabios matemáticos: y para que no parezca a Vuestra Santidad que prometo más utilidad en la obra de la que puedo presentar, paso ahora a lo construido.

LIBRO PRIMERO[1]

Entre los muchos y variados estudios sobre las letras y las artes, con los que se vivifican las inteligencias de los hombres, pienso que principalmente han de abarcarse y seguirse con el mayor afán las que versan sobre las cosas más bellas y más dignas del saber. Tales son las que tratan de las maravillosas revoluciones del mundo y del curso de los astros, de las magnitudes, de las distancias, del orto y del ocaso, y de las causas de todo lo que aparece en el cielo y que finalmente explican la forma total. Pues ¿qué hay más hermoso que el cielo, que contiene toda la belleza? Incluso los propios nombres lo declaran: Cielo y Mundo; éste, con denominación de pureza y ornamento, aquél con apelación a lo adornado. Al mismo, por su extraordinaria excelencia, muchísimos filósofos le llamaron dios visible. De ahí, que si la dignidad de las artes se estima por la materia que tratan, será sin duda importantísima, esta que unos llaman astronomía, otros astrología, y muchos entre los antiguos la consumación de las matemáticas. Ella es la cabeza de las demás artes nobles, la más digna del hombre libre, y se apoya en casi todas las ramas de las matemáticas. Aritmética, geometría, óptica, geodesia, mecánica, y si hay alguna otra más, todas se dirigen a ella. Y, siendo propio de todas las buenas artes el apartar de los vicios y dirigir la mente de los hombres hacia lo mejor, ella puede proporcionar esto más abundantemente y con increíble placer del espíritu. Pues ¿quién, adhiriéndose a lo que ve constituido en óptimo orden, dirigido por la providencia divina, mediante la asidua contemplación y cierto hábito hacia estas cosas, no es llamado hacia lo mejor y admira al artífice de todo, en el que está la felicidad y el bien completo? Pues no en vano aquel salmista divino se confesaría: delectado por el trabajo de dios y arrebatado por las obras de sus manos; si no es porque, por medio de estas cosas como por una especie de vehículo, fuéramos llevados a la contemplación del sumo bien.

Platón advirtió con mucho acierto, cuánta utilidad y adorno comporta a la República (pasando por alto las innumerables ventajas para los particulares). Éste, en el séptimo libro de las *Leyes*, considera que debe extenderse [su estudio], para que con su ayuda se mantenga viva y vigilante la ciudad, respecto del orden en los días, los tiempos divididos en meses y años con vista a las solemnidades y también a los sacrificios; y si (dice) alguien niega su necesidad para el hombre que desee aprender cualquiera de las

1. Los tres párrafos introductorios se hallan en la edición de Thorn del centenario y en la edición de Varsovia.

más altas doctrinas, pensará con gran estupidez; y estima que falta mucho, para que cualquiera pueda llegar a ser o ser llamado divino, si no tiene el conocimiento necesario del Sol, ni de la Luna, ni de los demás astros.

Pero esta ciencia, más divina que humana, que investiga temas de grandísima altura, no carece de dificultades, sobre todo respecto a sus principios y supuestos, a los que los griegos llaman «hipótesis», y vemos que muchos de los que intentaron tratarlos estuvieron en desacuerdo y ni siquiera utilizaron los mismos cálculos. Además, el curso de los astros y la revolución de las estrellas no ha podido definirse con un número exacto, ni reducirse a un conocimiento perfecto, si no es con mucho tiempo y con muchas observaciones realizadas de antemano, con las que, como ya diré, se transmite a la posterioridad de mano en mano. Pues, aunque C. Ptolomeo el Alejandrino, que destaca ampliamente sobre los demás por su admirable ingenio y escrupulosidad, llevó toda esta ciencia a su más alto grado mediante observaciones, durante más de cuatrocientos años, de manera que parecía no faltar nada que él no hubiera abordado. Sin embargo, vemos que muchas cosas no coinciden con aquellos movimientos que debían seguirse de su enseñanza, ni con algunos otros movimientos, descubiertos más tarde, aún no conocidos para él. De ahí que, incluso Plutarco, cuando habla del giro anual del Sol, dice: «Hasta ahora, el movimiento de los astros ha vencido la pericia de los matemáticos». En efecto, tomando como ejemplo el año mismo, considero bien claro que han sido tan diversas las opiniones, hasta tal punto que muchos han desesperado de poder encontrar un cálculo seguro sobre él. Así, favoreciéndome Dios, sin el que nada podemos, voy a intentar investigar con más amplitud sobre estas cosas respecto a las otras estrellas, poseyendo más detalles que apoyarán nuestra doctrina, a causa del intervalo más amplio de tiempo entre nosotros y los autores de este arte que nos precedieron, con cuyos hallazgos tendremos que comparar los que han sido también descubiertos de nuevo por nosotros. Confieso que voy a exponer muchas cosas de diferente manera que mis predecesores, aunque conviene apoyarse en ellos, puesto que por primera vez abrieron la puerta en la investigación de estas cosas.

1. EL MUNDO ES ESFÉRICO

En primer lugar, hemos de señalar que el mundo es esférico, sea porque es la forma más perfecta de todas, sin comparación alguna, totalmente indivisa, sea porque es la más capaz de todas las figuras, la que más conviene para comprender todas las cosas y conservarlas, sea también porque las demás partes separadas del mundo (me refiero al Sol, a la Luna y a las estrellas) aparecen con tal forma, sea porque con esta forma todas las cosas tienden a perfeccionarse, como aparece en las gotas de agua y en los demás cuerpos líquidos, ya que tienden a limitarse por sí mismos, para que nadie ponga en duda la atribución de tal forma a los cuerpos divinos.

2. LA TIERRA TAMBIÉN ES ESFÉRICA

También la Tierra es esférica, puesto que por cualquier parte se apoya en su centro. Sin embargo, la esfericidad no aparece inmediatamente como perfecta por la gran eleva-

ción de los montes y el descenso de los valles, a pesar de lo cual modifican muy poco la redondez total de la Tierra. Lo cual se clarifica de la siguiente manera. Pues hacia el norte, marchando desde cualquier parte, el vértice de la revolución diurna se eleva poco a poco, descendiendo el otro por el contrario otro tanto, y muchas estrellas alrededor del septentrión parecen no ponerse y algunas hacia el punto austral parecen no salir más. Así, en Italia no se ve Canopus, visible desde Egipto. Y en Italia se ve la última estrella de Fluvius, que no conoce nuestra región de clima más frío. Por el contrario, para los que marchan hacia el sur se elevan aquéllas, mientras que descienden las que para nosotros están elevadas. Además, las inclinaciones de los polos con relación a espacios medidos de la Tierra están en cualquier parte en la misma razón, lo que en ninguna otra figura sucede, nada más que en la esférica. De donde es evidente que la Tierra también está incluida entre vértices y, por tanto, es esférica. Hay que añadir también, que los habitantes de oriente no perciben los eclipses vespertinos del Sol y de la Luna, ni los que habitan hacia el ocaso los matutinos; con respecto a los eclipses medios, aquéllos los ven más tarde y éstos más pronto. También se deduce porque las aguas surcadas por los navegantes tienen esta misma figura: puesto que quienes no distinguen la tierra desde la nave, la contemplan desde la parte alta del mástil, desde la tierra, a los que permanecen en la orilla, les parece que desciende poco a poco al avanzar la nave, hasta que finalmente se oculta, como poniéndose. Consta también que las aguas, fluidas por naturaleza, se dirigen siempre hacia abajo, lo mismo que la tierra, y no se elevan desde el litoral hacia posiciones anteriores, más de lo que su convexidad permite. Por lo cual es aceptado, que la tierra es tanto más alta, cuanto emerge sobre el océano.

3. DE CÓMO LA TIERRA JUNTO CON EL AGUA FORMA UN GLOBO

Así pues, el océano que rodea a ésta [la tierra] extendiendo sus mares por todas partes, llena sus abismos más profundos. Por tanto convenía que hubiera menos agua que tierra, para que el agua no absorbiera toda la tierra (dirigiéndose ambas por su gravedad hacia el mismo centro) y con el fin de que quedaran algunas partes de tierra e islas perceptibles aquí y allá para salvación de los seres vivos. Pues ¿qué es el propio continente y la superficie de la Tierra sino una isla mayor que las demás? Y no es necesario escuchar a algunos de los peripatéticos, quienes consideraron que toda el agua es diez veces mayor que toda la tierra, aceptando la conjetura de que en la transmutación de los elementos de una parte de tierra resultan diez de agua; y dicen que la tierra sobresale un poco, porque, siendo cavernosa, no se equilibra por todas partes según su gravedad, y que uno es el centro de gravedad y otro el de magnitud. Pero se equivocan por su ignorancia del arte de la geometría, al no saber que el agua no puede ser mayor ni siete veces, para que alguna parte de la tierra estuviera seca, a no ser que la Tierra abandonara el centro de gravedad y dejara el lugar a las aguas como más pesadas que ella. Puesto que las esferas se relacionan entre sí como los cubos de sus diámetros. En consecuencia, si para siete partes de agua hubiera una octava parte de tierra, su diámetro no podría ser mayor que la distancia desde el centro [el radio] a la circunferencia de las aguas. Tanto menos, que el agua sea diez veces mayor.

Que no exista diferencia alguna entre el centro de gravedad de la Tierra y el de su magnitud, puede aceptarse, porque la convexidad de la tierra que emerge del océano no aumenta siempre de una manera continua, en caso contrario rechazaría lo más posible las aguas marinas y no permitiría en modo alguno que irrumpieran los mares internos y los golfos tan extensos. Además, a partir del litoral del océano no cesaría de aumentar la profundidad del abismo, de modo que ni isla alguna, ni escollo, ni ningún terreno, serviría de obstáculo a los que navegando avanzan alejándose. Y ahora consta, que entre el mar de los egipcios y el golfo Arábigo hay apenas más de quince estadios, en medio casi de la superficie de la Tierra. Y, por otra parte, Ptolomeo, en su *Cosmografía*, extiende la tierra habitable hasta el círculo medio, dejando lo restante de la tierra como desconocido, donde los más modernos añadieron Catay y otras regiones amplísimas hasta los LX grados de longitud, de modo que la tierra es habitada ya en una longitud mayor, que la ocupada por el resto del océano. Si además se añaden a estas tierras las islas encontradas en nuestro tiempo por los príncipes de España y Portugal, y sobre todo América, llamada así por su descubridor, el jefe de las naves, a la que por su magnitud aún desconocida la consideran otra superficie de la Tierra [«orbis terrarum»], además de las muchas islas desconocidas antes, por la que tampoco sorprendería que hubiera antípodas o antíctonas. Pues el cálculo geométrico obliga a pensar que la propia América es diametralmente opuesta a la India del Ganges por su situación.

Por todas estas cosas, juzgo suficientemente claro que la tierra y el agua conjuntamente se apoyan en un solo centro de gravedad, y que éste no es otro que el centro de magnitud de la Tierra, la cual siendo más pesada, llena con agua sus partes deprimidas; y, por tanto, que hay menor cantidad de agua en comparación con la de tierra, aunque en la superficie aparezca más cubierta de agua. Sin duda, es necesario que la tierra con las aguas que la rodean tenga la figura que muestra su sombra: pues produce que la Luna se eclipse proyectando círculos perfectos. En consecuencia, no es plana como opinaron Empédocles y Anaxímenes, ni semejante a un tambor, como opinó Leucipo, ni escafoide como Heráclito, ni cóncava de otro modo, como Demócrito, ni cilíndrica, como Anaximandro, ni es infinita en su parte inferior teniendo debajo una gran cantidad de raíces, como Jenófanes, sino perfectamente redonda, como opinan los filósofos.

4. EL MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS CELESTES ES REGULAR Y CIRCULAR, PERPETUO O COMPUESTO POR MOVIMIENTOS CIRCULARES

Después de esto, recordaremos que el movimiento de los cuerpos celestes es circular. Pues la movilidad de la esfera es girar en un círculo, expresando mediante el mismo acto su forma, en un cuerpo simplicísimo, donde no se puede encontrar ni principio ni fin, ni distinguir uno de otro, mientras [la esfera] pasa hacia los mismos puntos volviendo hacia los mismos. Sin embargo, hay varios movimientos a causa de la multitud de órbitas.[1]

1. El «círculo orbital» (*orbis*) es el círculo máximo sobre el cual el planeta se mueve en su esfera (*sphaera*). Copérnico utiliza la palabra orbis, que designa originariamente un círculo más que una esfera porque, si la esfera puede ser necesaria para la explicación mecánica del movimiento, sólo el círculo es necesario para la explicación matemática.

La más conocida de todas es la revolución diaria, a la que los griegos llaman νυχθή μερον, esto es, un espacio de tiempo de un día y una noche. Por eso se piensa que todo el mundo se desliza desde el orto hacia el ocaso, excepto la Tierra. Esta revolución se entiende como la medida común de todos los movimientos, puesto que medimos el tiempo sobre todo por el número de días.

Después vemos otras revoluciones como en sentido contrario, esto es, del ocaso al orto, me refiero a la del Sol, la de la Luna y de las cinco estrellas errantes. Así, el Sol nos proporciona el año, la Luna los meses, los períodos de tiempo más divulgados; así, los otros cinco planetas realizan cada uno su propio ciclo. Sin embargo, las diferencias son múltiples: primero, porque no giran alrededor de los mismos polos a través de los que se desenvuelve aquel primer movimiento, avanzando por la oblicuidad de la eclíptica; después, porque en su propio ciclo no parecen moverse con regularidad. Pues el Sol y la Luna se observan a lo largo de su curso unas veces lentos, otras veces más rápidos. Pero percibimos también que las otras cinco estrellas errantes retroceden a veces y después se detienen.

Y mientras el Sol avanza constante y directamente por su camino, aquéllos andan errantes de diversos modos, vagando unas veces hacia el sur, otras hacia el norte: por ello son llamados «planetas». Añádase también el que unas veces se presentan más cercanos a la Tierra y se llaman perigeos [que están en su perigeo], otras más alejados y se les dice apogeos [que están en su apogeo]. Y no menos conviene confesar que los movimientos son circulares, o compuestos por muchos círculos, porque mantienen las irregularidades según una ley fija y con renovaciones constantes: lo que no podría suceder si no fueran circulares. Pues el círculo es el único que puede volver a recorrer el camino recorrido. Como, por ejemplo, el Sol, con su movimiento compuesto de círculos, nos trae de nuevo, una vez y otra, la irregularidad de los días y las noches y las cuatro estaciones del año, en lo cual se reconocen varios movimientos: puesto que no puede suceder que un cuerpo celeste simple se mueva desigualmente en una sola órbita. Pues esto podría acontecer, o por la inconstancia de la fuerza motriz, bien por una causa exterior o por su propia naturaleza, o por las modificaciones del cuerpo que gira. Pero como repugnan a la inteligencia una y otras, y es indigno pensar que tal cosa se produce en los cuerpos que están constituidos por una ordenación óptima, es consecuente admitir que sus movimientos regulares nos aparecen como irregulares, bien por los diferentes polos de sus círculos, o también porque la Tierra no está en el centro de los círculos, a través de los cuales ellos se mueven, y para nosotros que contemplamos desde la Tierra el tránsito de estos astros, nos sucede que, por sus irregulares distancias, nos parecen los más cercanos mayores que los que están más alejados (según ha sido mostrado en la óptica); así, en arcos iguales de una órbita (al ser visto a una distancia diferente) aparecerán movimientos desiguales en tiempos iguales. Por esta causa ante todo, juzgo necesario que con todo cuidado señalemos cuál sea el comportamiento de la Tierra con respecto al cielo, para que mientras queremos estudiar lo más alto, no ignoremos 1o que nos es más próximo, y por el mismo error atribuyamos a los cuerpos celestes lo que es propio de la Tierra.

5. ACERCA DE SI EL MOVIMIENTO DE LA TIERRA ES CIRCULAR Y DE SU POSICIÓN

Ya se ha demostrado que también la Tierra tiene forma de globo. Pienso que se debe ver si el movimiento es consecuencia de su forma y qué posición ocupa en el universo: sin estos datos no es posible hallar una razón fija de los movimientos aparentes en el cielo. Aunque entre los autores, una mayoría conviene en que la Tierra descansa en medio del mundo, de manera que juzgan esto como inopinable y hasta ridículo pensar lo contrario; sin embargo, si lo consideramos con más atención, esta cuestión aparecerá no ya sólo como no resuelta, sino también como nada despreciable. Pues todo cambio según la posición que aparece, o es por el movimiento de lo mirado, o del que mira, o evidentemente por un cambio dispar de uno y otro. Pues no se percibe movimiento entre movimientos iguales entre sí, me refiero a entre lo visto y el que ve. Y es desde la Tierra, a partir de donde se contempla aquel ciclo celeste y se representa a nuestra visión. En consecuencia, si se le atribuye algún movimiento a la Tierra, el mismo aparecerá igual en el universo que le es exterior, pero como si pasaran por encima en sentido opuesto, tal es en primer lugar la revolución diaria. Pues este movimiento parece arrastrar a todo el mundo, excepto a la Tierra y lo que está a su alrededor. Y si concedieras que el cielo no tiene nada que ver con este movimiento, y que la Tierra gira del ocaso hacia el orto, si alguien con seriedad estudia cuanto se refiere al orto y ocaso aparente del Sol, de la Luna y de las estrellas, encontrará que estas cosas suceden así. Y siendo el cielo el que contiene y abarca todo, el lugar común de todas las cosas, no aparece claro inmediatamente, por qué no se atribuye el movimiento más al contenido que al continente, a lo colocado más que a lo que proporciona la localización [«locato quam locanti»]. Con razón eran de esta opinión los pitagóricos Heráclides, Ecfanto y Nicetus de Siracusa, según Cicerón, que suponían a la Tierra dando vueltas en el centro del mundo. Opinaban que las estrellas se ponían a causa de la interposición de la Tierra y que salían al cesar de interponerse.

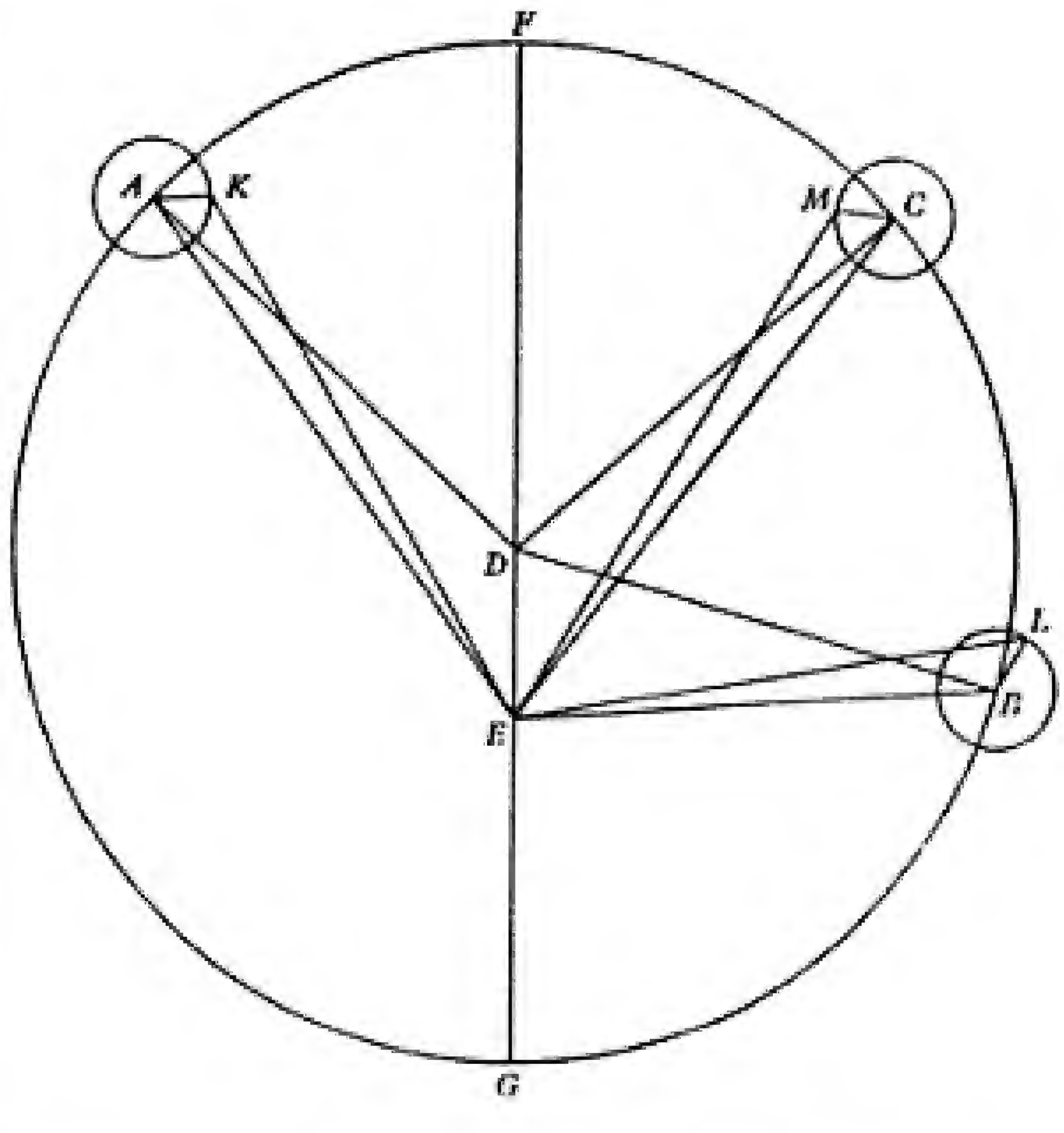
Supuesto esto, sigue también otra duda, y no menor, sobre la posición de la Tierra, aunque ahora se acepta y se cree por casi todos que la Tierra está en el centro del mundo. Puesto que, si alguien niega que la Tierra conserva el medio o centro del mundo, no admitiendo, sin embargo, que la distancia [entre el centro de la Tierra y el centro del mundo] es tan grande que fuera comparable [a la distancia] con la esfera de las estrellas fijas, aunque sea importante y se pone de manifiesto en relación con las órbitas del Sol y de las demás estrellas, y por ello estime que el movimiento de éstos aparece diversificado, como si fueran regulados por otro centro distinto del de la Tierra, quizá pudiera aportar una razón no inadecuada sobre el movimiento de apariencia irregular. Pues el que los astros errantes se perciban más cercanos a la Tierra, y los mismos más alejados, necesariamente prueba que el centro de la Tierra no es centro de aquellos círculos. Lo que consta es si la Tierra se acerca o se aleja de aquéllos o aquéllos de la Tierra, y no sería asombroso, si alguien opinase que además de aquella revolución diaria existe algún otro movimiento de la Tierra. Y se cuenta que Filolao el Pitagórico, matemático no vulgar, hasta el punto de que para verle Platón no dudó en dirigirse a Italia, según transmiten los que escribieron la vida de Platón, opinó que la Tierra giraba, e incluso que se movía con varios movimientos, y que era uno más entre los astros.

Pero muchos pensaron que podía demostrarse con cálculo geométrico que la Tierra está en el medio del mundo, y que es como un punto central con respecto a la inmensidad

del cielo, y que por esta causa es inmóvil, de modo que al moverse el universo el centro permanece sin movimiento, y lo que está próximo al centro se mueve muy lentamente.

6. DE LA INMENSIDAD DEL CIELO CON RESPECTO A LA MAGNITUD DE LA TIERRA

El hecho de que esta tan gran masa de la Tierra no sea comparable con la magnitud del cielo puede entenderse por lo siguiente: porque los círculos limitantes (pues así se traducen los ὁρίζ οντας de los griegos) cortan en dos toda la esfera del cielo, esto no podría suceder si la magnitud de la Tierra comparada con el cielo, o su distancia desde el centro del mundo, fuera muy importante. Pues el círculo que corta la esfera en dos pasa por el centro de la esfera y es el máximo de los circunscribibles. Así pues, el horizonte sea el círculo ABCD, y sea E la Tierra, donde está nuestro punto de vista y el centro del horizonte, desde el cual se separan las [estrellas] visibles de las no visibles. Por medio de una dioptra o de un horoscopio o un corobate, colocado en E, se ve el principio de Cáncer naciente en el punto C, y en el mismo momento aparece el principio de Capricornio poniente en el punto A. En consecuencia, estando AEC en línea recta según la dioptra, consta que es un diámetro de la eclíptica, porque los seis signos [del zodíaco] visibles delimitan un semicírculo, y el centro E es el mismo que el del horizonte. Pero terminada la revolución, cuando el principio de Capricornio surja en B, entonces se verá también el ocaso, de Cáncer en D y la línea BED será recta y un diámetro del mismo círculo: y es patente que su centro está en la sección común. En consecuencia, el círculo del horizonte cortará siempre en dos a la eclíptica, que es el círculo



máximo de la esfera. Y como en la esfera, si un círculo corta por la mitad a alguno de los círculos máximos, también el que corta es máximo. Por tanto, uno de los círculos máximo es el horizonte, y su centro, según parece, es el mismo que el de la eclíptica, siendo, sin embargo, necesario que sea distinta la línea que parte de la superficie de la Tierra, y la que parte del centro. Pero a causa de la inmensidad con respecto a la Tierra se asemejan a paralelas, que parecen como una sola línea por la excesiva distancia del límite final, cuando el espacio mutuo que comprenden en relación con su longitud resulta de este modo incomparable para la percepción, como se demuestra en óptica.

Por este argumento aparece suficientemente claro que el cielo es inmenso en comparación con la Tierra y que ofrece un aspecto de infinita magnitud, pero ante todo,

para la estimación de los sentidos. En magnitud, la Tierra es con respecto al cielo como un punto con respecto al cuerpo y como lo finito con respecto a lo infinito. Y no parece haberse demostrado otra cosa; pues de ahí no se sigue que la Tierra deba estar quieta en el medio del mundo. Y aún nos admiramos más de que tan vasto mundo de la vuelta en un espacio de XXIIII horas, más que una mínima parte de éste que es la Tierra.

Pues los que dicen que el centro es inmóvil y también que las cosas próximas al centro se mueven menos, esto no prueba que la Tierra esté quieta en medio del mundo, y no es diferente que si dijeras que el cielo gira, pero los polos están fijos, y que las cosas próximas a los polos se mueven muy poco. De este modo se manifiesta que Cynosura [la estrella polar] se mueve con mucha mayor lentitud que Aquila o Canícula, porque describe un círculo menor por la proximidad del polo. Como todas ellas forman parte de una misma esfera, cuya movilidad, desapareciendo junto a su eje, no admite un movimiento igual entre sí de todas sus partes; sin embargo, la revolución total las conduce en una igualdad de tiempo, pero no en una igualdad de espacio.

En esta razón se apoya el argumento según el cual la Tierra constituye una parte de la esfera celeste, de la misma especie y del mismo movimiento, de modo que por estar próxima al centro se mueve poco. Luego, ella misma se moverá, en cuanto cuerpo existente, no en cuanto centro, en el mismo tiempo con respecto a arcos semejantes del círculo celeste, aunque menores. Que esto es falso, es más claro que la luz: pues entonces sería necesario que el mediodía permaneciera siempre en un lugar, y en otro siempre fuera medianoche, y no se podrían producir ni los ortos ni los ocasos cotidianos, siendo uno e inseparable el movimiento del todo y de la parte.

Pero la relación entre aquellas cosas que están separadas por una diferencia sustancial es enteramente diversa: las que se mueven en una órbita más pequeña avanzan más deprisa que las que recorren un círculo mayor. Así, el astro Saturno, el mayor de los errantes, completa su giro en el año treinta, y la Luna, que sin duda es el más próximo a la Tierra, recorre su circuito en un mes; y la misma Tierra, finalmente, parecerá completar su circuito en el espacio de tiempo de un día y una noche. Por consiguiente resurge la duda sobre la revolución diaria.

E incluso su posición se cuestiona como menos segura por lo anteriormente dicho. Pues dicha demostración no aporta ninguna otra cosa que la inmensa magnitud del cielo con respecto a la Tierra. Y no consta en manera alguna hasta dónde se extiende esta inmensidad. Igual que, en el extremo opuesto, en los corpúsculos mínimos e indivisibles, que llaman átomos, aunque no son sensibles, duplicados o tomados múltiplemente no componen de inmediato un cuerpo visible, pero pueden multiplicarse hasta tal punto que sean suficientes para aparecer con una magnitud aparente; así ocurre también con respecto a la posición de la Tierra, aun no estando en el centro del mundo, sin embargo, su distancia [al centro] es incomparable sobre todo en relación con la esfera de las estrellas fijas.

7. POR QUÉ LOS ANTIGUOS PENSARON QUE LA TIERRA ESTABA INMÓVIL EN MEDIO DEL MUNDO COMO SI FUERA SU CENTRO

Los filósofos antiguos, con algunas otras razones, intentaron demostrar en esta cuestión que la Tierra estaba en el medio del mundo. Así, alegan como causa más poderosa la de

la gravedad y la ligereza. Pues la Tierra es el elemento más pesado y todas las cosas pesadas son conducidas hacia ella, y tienden hacia su auténtico punto medio. En efecto, siendo la Tierra esférica, hacia ella son arrastradas las cosas más graves por su propia naturaleza, formando ángulos rectos con su superficie, y si no fueran retenidas en dicha superficie, caerían hacia su centro: puesto que una línea recta, que cae perpendicular a una superficie plana, tangente a la esfera, pasa por el centro. Pero parece seguirse que las cosas son conducidas al punto medio para quedar inmóviles en el centro. En consecuencia, tanto más descansará toda la Tierra en el centro, y ella, que recibe en sí todo lo que cae, permanecerá inmóvil por su peso.

De igual modo, también se intenta probarlo en razón del movimiento y de su naturaleza. Dice Aristóteles que el movimiento de un cuerpo simple es simple. Pero hay un movimiento simple recto y otro circular; de los rectos hay uno hacia arriba y otro hacia abajo. Por lo que todo movimiento simple o se dirige hacia el centro, que es hacia abajo, o parte del centro, que es hacia arriba, o alrededor del centro, que es el circular. De este modo, conviene que las tierras y las aguas, consideradas elementos más pesados, sean arrastradas hacia dentro, esto es, que se dirijan al centro, pero los aires y los fuegos, que se destacan por su ligereza, han de moverse desde el centro hacia arriba. Parece conveniente conceder un movimiento rectilíneo a estos cuatro elementos, y en cambio a los cuerpos celestes el que se muevan en una órbita alrededor del centro. Esto dice Aristóteles.

Consecuentemente, dice Ptolomeo de Alejandría, si la Tierra diese vueltas, al menos una revolución diaria, tendría que suceder lo opuesto a lo antes señalado. Pues su movimiento tendría que ser muy violento y su rapidez insuperable, ya que en XXIIII horas recorrería todo el ámbito de la Tierra. Pero este movimiento vertiginoso lanzaría de repente todas las cosas y parecerían incapaces de unirse, y más bien se dispersaría lo unido, a no ser que alguna fuerza de coherencia las mantuviera en su unidad. Y ya hace tiempo, dijo, la Tierra dispersada se habría elevado al mismo cielo (lo que es totalmente ridículo), y con mayor motivo, los seres animados y todas las demás cosas sueltas en manera alguna permanecerían estables. Pero tampoco las cosas que caen se dirigirían en línea recta al lugar destinado para ellas, ni en la perpendicular, desplazada entre tanto [la posición] por tanta rapidez. Y también veríamos que las nubes y cualquier otra cosa pendiente en el aire siempre eran arrastradas hacia el ocaso [occidente].

8. SOLUCIÓN DE DICHAS RAZONES Y SU INSUFICIENCIA

Por estas y semejantes razones dicen que la Tierra está inmóvil en el medio del mundo y que no hay duda sobre ello. Pero si alguien opinara que la Tierra da vueltas, diría que tal movimiento es natural y no violento. Y lo que acontece de acuerdo con la naturaleza produce resultados opuestos a lo que acontece de acuerdo con la violencia. Pues es necesario que se destruyan aquellas cosas sobre las que actúa la fuerza y el ímpetu, y que no puedan subsistir mucho tiempo. Pero lo que surge de la naturaleza se mantiene correctamente y se conserva en su composición óptima. Luego, en vano teme Ptolomeo que la Tierra y todo lo terrestre se disperse a causa de una revolución realizada por la eficacia de la naturaleza, que está bien lejos de la del arte o de lo que puede conseguirse mediante el ingenio humano.

Pero ¿por qué no sospecha eso mismo, con mayor razón del mundo, cuyo movimiento debe ser tanto más veloz cuanto es mayor el cielo que la Tierra? ¿O se ha

hecho el cielo tan inmenso, porque un movimiento de inefable vehemencia lo aleja del centro, y de no ser así caería si estuviera quieto? Con seguridad, si este razonamiento tuviera razón de ser, la magnitud del cielo también se dirigiría hacia lo infinito. Pues un movimiento cuanto más es llevado hacia lo alto por su ímpetu, tanto más veloz será a causa de la siempre creciente circunferencia, que necesariamente ha de recorrer en el espacio de XXIIII horas: y a la vez, al crecer el movimiento, crece la inmensidad del cielo. Así la velocidad hará avanzar hasta el infinito a la magnitud y la magnitud a la velocidad. Y según aquel axioma físico: lo que es infinito no puede ser atravesado ni movido bajo razón alguna. Luego necesariamente el cielo estará quieto.

Pero dicen que fuera del cielo no hay ningún cuerpo, ni lugar, ni vacío, ni en absoluto nada, y no existe nada por donde pueda extenderse el cielo. Entonces es realmente admirable, si algo puede ser contenido por nada. Pero si el cielo fuera infinito y sólo fuera finito en su concavidad interior, quizá con más fuerza se confirmará que fuera del cielo no hay nada, puesto que cualquier cosa estaría en él, sea cual sea la magnitud que ocupara, pero el cielo mismo permanecería inmóvil. Pues el argumento más fuerte para intentar demostrar que el mundo es finito es el movimiento.

Pero dejemos a la discusión de los fisiólogos [filósofos de la naturaleza] si el mundo es finito o infinito, teniendo nosotros como seguro esto, que la Tierra está limitada por sus polos y terminada por una superficie esférica. Luego, por qué dudamos aún en concederle una movilidad por naturaleza congruente con su forma, en vez de deslizarse todo el mundo, cuyos límites se ignoran y no se pueden conocer, y no confesamos sobre la revolución diaria que es apariencia en el cielo y verdad en la Tierra, y que estas cosas son como lo que dijera el Eneas de Virgilio, cuando afirma: «Salimos del puerto y las tierras y las ciudades retroceden». Puesto que al flotar una nave sobre la tranquilidad de las aguas, todo lo que está fuera de ellos es considerado por los navegantes moviéndose, de acuerdo con la imagen de su movimiento, y al mismo tiempo juzgan que están quietos, con todo lo que está con ellos. Así, en lo concerniente al movimiento de la Tierra, puede estimarse que todo el mundo da vueltas.

Por consiguiente, ¿qué podríamos decir de las nubes y de todas las demás cosas que flotan en el aire, bajan, se detienen, o suben de nuevo a las alturas, si no es que la Tierra, con el elemento acuoso unido a ella, se mueve de esta forma, y también que una parte no pequeña de aire y todo lo que tiene del mismo modo relación con la Tierra, sea porque el aire próximo a la Tierra, mezclado con materia acuosa o térrea, sigue la misma naturaleza que la Tierra, o sea porque el movimiento del aire es adquirido, que participa en la perpetua revolución y sin resistencia a causa de la contigüidad de la Tierra? Por el contrario, con una admiración igual, dicen que la región superior del aire sigue el movimiento celeste, lo que revelan aquellas estrellas repentinas, me refiero a los cometas, también llamadas pogonías [barbadas] por los griegos, para cuya generación designan tal lugar; las cuales también, como los otros astros, nacen y se ponen. Nosotros podemos decir que, por su gran distancia desde la Tierra, esa parte del aire está privada de aquel movimiento terrestre. Por eso aparecerá tranquilo el aire que está próximo a la Tierra, y también lo que está suspendido en él, a no ser que, como puede suceder, sean agitados por el viento o cualquier otro ímpetu. ¿Pues es el viento en el aire otra cosa distinta que las olas en el mar?

Pero tenemos que confesar que el movimiento de lo que cae y de lo que se eleva es doble, en comparación con el del mundo, y compuesto de un movimiento recto y uno circular. Y en cuanto a las cosas que caen por su propio peso, siendo sobre todo de tierra, no es dudoso que las partes conserven la misma naturaleza que el todo. Y no se pre-

senta ninguna otra razón en las que por una fuerza ígnea son lanzadas hacia las alturas. Pues también este fuego terrestre se alimenta sobre todo de una materia térrea, y definen la llama no de otra manera que como humo ardiente. Pues es propiedad del fuego extenderse a todo lo que invade: y esto lo hace con tanta fuerza que con ningún procedimiento, ni con ninguna máquina puede impedirse que, rota la cárcel, complete su obra. También el movimiento se extiende desde el centro hasta la circunferencia. De ahí que, si alguna de las partes terrestres se encendiera, sería llevada del centro a lo alto.

En consecuencia, lo que dicen de que un movimiento simple es propio de un cuerpo simple, se verifica en primer lugar del circular, si el cuerpo simple permanece en su lugar natural y en su propia unidad. En esa posición el movimiento no es otro que el circular, que permanece totalmente en sí, semejante a lo que está en reposo. Sin embargo, el movimiento rectilíneo sobreviene a aquellas cosas que son desplazadas de su lugar natural, o que son empujadas o que de algún modo están fuera de él. Y nada repugna tanto a la ordenación y forma de todo el mundo cuanto que algo esté fuera de su sitio. Luego el movimiento recto no sucede sino a aquellas cosas que no se mantienen correctamente y no son perfectas conforme a la naturaleza, cuando se separan de su todo y abandonan su unidad. Sobre todo las que se agitan arriba y abajo, y no tienen, excepto el circular, ningún movimiento simple, uniforme y regular, pues no pueden estar en equilibrio a causa de su ligereza o por el impulso de su peso. Y todo lo que cae, teniendo al principio un movimiento lento, aumenta su velocidad al caer. Por el contrario, vemos que este fuego terreno (y no vemos ningún otro) impulsado hacia lo alto, inmediatamente languidece, reconociendo como causa la de la violencia de la materia terrestre. El circular siempre gira regularmente, pues tiene una causa constante, sin embargo aquél [el rectilíneo] deja de acelerarse; porque al conseguir su lugar dejan de ser pesados o ligeros y cesa aquel movimiento. Siendo, pues, el movimiento circular el del todo, en cambio el rectilíneo el de las partes, podemos comparar el movimiento circular con el rectilíneo, como un ser vivo con uno enfermo. Y el hecho de que Aristóteles divida el movimiento simple en tres clases: el que parte del centro, el que se dirige al centro y el que gira alrededor del centro, se juzgará como un único acto de razonamiento, del mismo modo que distinguimos la línea, el punto y la superficie, aunque no pueden subsistir el uno sin el otro, o sin el cuerpo.

A esto se añade también que la condición de inmovilidad se considera más noble y divina que la de mutación o inestabilidad, que convienen por ello más a la Tierra que al mundo. Añado también que parecería bastante absurdo adjudicar un movimiento al continente o localizante y no más bien al contenido o localizado, que es la Tierra. Finalmente, siendo manifiesto que las estrellas errantes se aproximan o se alejan de la Tierra, entonces será el movimiento de un solo cuerpo que se desarrolla alrededor del punto medio (ellos quieren que sea el centro de la Tierra), desde el punto medio y también hacia el mismo. En consecuencia, conviene que el movimiento, que se realiza alrededor del punto medio, sea tomado como el más general y suficiente, de modo que el movimiento de cada uno se apoye sobre su propio centro.

A partir de todas estas cosas adviertes que es más probable la movilidad de la Tierra que la quietud, sobre todo con respecto a la revolución diaria, mucho más propia de la Tierra. Y pienso que esto es suficiente para la primera parte de la cuestión.

9. SI PUEDEN ATRIBUIRSE A LA TIERRA VARIOS MOVIMIENTOS Y ACERCA DEL CENTRO DEL MUNDO

En consecuencia, como nada impide la movilidad de la Tierra, pienso que ahora hay que ver si le convienen varios movimientos, de modo que pueda considerarse uno de los astros errantes. Pues que no es el centro de todas las revoluciones lo manifiestan el aparente movimiento irregular de las errantes y sus distancias variables a la Tierra, que no pueden entenderse mediante un círculo homocéntrico sobre la Tierra. Luego, si existen varios centros, cualquiera podrá dudar, no temerariamente, del centro del mundo, sobre si realmente lo es el centro de gravedad terrestre u otro. Yo creo que la gravedad no es sino una cierta tendencia natural, ínsita en las partes por la divina providencia del hacedor del universo, para conferirles la unidad e integridad, juntándose en forma de globo. Este modo de ser es también atribuible al Sol, la Luna y las demás fulgurantes entre las errantes, para que, por su eficacia, permanezcan en la redondez con la que se presentan, las cuales, sin embargo, realizan sus circuitos de muchos modos diferentes.

En consecuencia, si la Tierra realiza otros movimientos, por ejemplo alrededor del centro, será necesario que éstos sean semejantes a los que aparecen exteriormente en muchos [astros], entre ellos encontramos el circuito anual. Puesto que si se cambiara [el movimiento] de solar en terrestre, concedida la inmovilidad del Sol, los ortos y los ocasos de los signos y de las estrellas fijas, por los cuales se convierten en estrellas matutinas y vespertinas, aparecerían del mismo modo, y también las detenciones, los retrocesos y avances de las errantes, no parecería como propio de ellas, sino como un movimiento de la Tierra, que cambian en virtud de sus apariencias. Finalmente, se pensará que el Sol ocupa el centro del mundo. Todo esto nos lo enseña la razón del orden, según la cual se suceden unas cosas a otras, y la armonía de todo el mundo, si, como dicen, con los dos ojos contemplamos esta cuestión.

10. SOBRE EL ORDEN DE LAS ÓRBITAS CELESTES

Observo que nadie duda que el cielo de las estrellas fijas es lo más alto de todo lo visible. Pero vemos que los antiguos filósofos querían tomar el orden de las estrellas errantes según la magnitud de sus revoluciones, aceptando como razón el que, a igual velocidad de los móviles, están más lejos los que parecen moverse más despacio, según se demuestra en la *Óptica* de Euclides. Por ello piensan que la Luna da la vuelta en un espacio brevísimo de tiempo, puesto que se mueve próxima a la Tierra en un círculo muy pequeño. En cambio, consideran a Saturno el más alto, porque recorre el circuito más grande en el tiempo mayor. Por debajo de él está Júpiter, después de éste, Marte. Sobre Venus y Mercurio se encuentran varias opiniones, porque no se alejan del Sol de la misma manera que los otros.[1] Por ello, unos los colocan por encima del Sol, como Timeo

1. La máxima elongación angular entre Venus y el Sol es aproximadamente 45 grados; la de Mercurio, aproximadamente 24 grados; mientras que Saturno, Júpiter y Marte tienen todo el dominio posible de elongaciones angulares, es decir, hasta 180 grados.

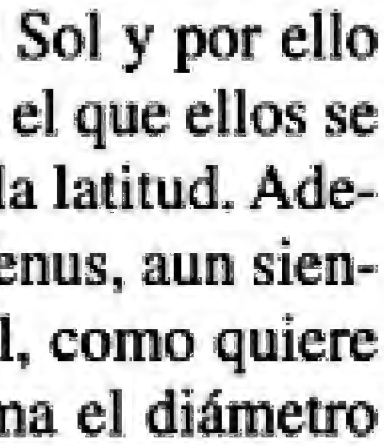
el de Platón, otros por debajo de él, como Ptolomeo y gran parte de los más modernos. Alpetragius coloca a Venus superior al Sol y a Mercurio inferior.

En consecuencia, los que siguen a Platón, consideran que todas las estrellas, cuerpos oscuros por otra parte, brillan con la luz recibida del Sol; si estuviesen por debajo del Sol, por la poca distancia desde éste, serían vistos faltándoles la mitad o parte de su redondez. Pues la luz recibida la reenvían hacia arriba, esto es, hacia el Sol, tal como vemos en la Luna nueva o menguante. También dicen que a veces el Sol es interceptado por el paso de ellos y le falta la luz a tenor de su magnitud; como esto no sucede nunca, piensan que de ningún modo están por debajo del Sol.[1]

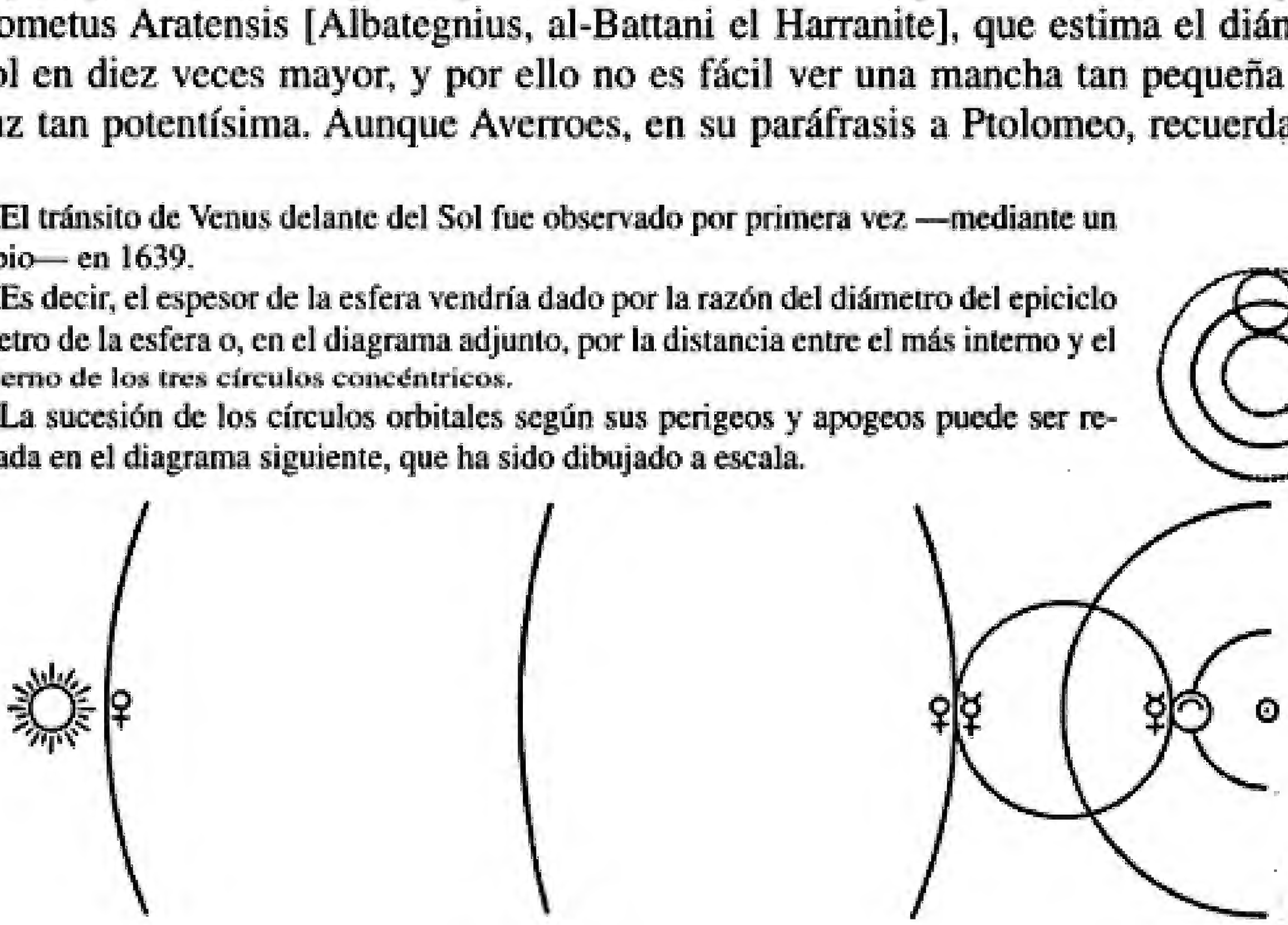
Por el contrario, quienes colocan por debajo del Sol a Venus y Mercurio reivindican como razón la amplitud de espacio que aprecian entre el Sol y la Luna. Pues encontraron que la distancia máxima de la Tierra a la Luna es de sesenta y cuatro y un sexto unidades, siendo una unidad la distancia desde el centro de [el radio] la Tierra, tal medida está contenida dieciocho veces en el intervalo mínimo del Sol [y la Tierra], que son 1.160 unidades, y entre el mismo y la Luna 1.096. Y para que no permanezca vacía tan gran extensión, a partir de los intervalos entre los ápsides, por medio de los cuales se calcula el espesor de aquellos orbes,[2] encuentran que estos números [distancias] son completados, de tal manera que al ápside más alto de la Luna sucede el más bajo de Mercurio, a cuyo punto más alto sigue la próxima Venus, la que desde su ápside más elevado casi toca al ínfimo del Sol. Y en efecto, entre los ápsides de Mercurio calculan unas cientosetenta y siete y media de las unidades antedichas, y el restante espacio se llena con el intervalo de Venus[3] de aproximadamente 910 unidades. Por tanto, no reconocen que en estas estrellas haya una cierta opacidad similar a la de la Luna, sino que brillan con luz propia o impregnados todos sus cuerpos por el Sol y por ello no ponen impedimento al Sol, lo cual en la realidad es una idea rarísima el que ellos se interpongan a nuestra visión del Sol, pues ordinariamente se retiran por la latitud. Además, porque son cuerpos pequeños en comparación con el Sol, ya que Venus, aun siendo mayor que Mercurio, apenas puede cubrir la centésima parte del Sol, como quiere Machometus Aratensis [Albategnius, al-Battani el Harranite], que estima el diámetro del Sol en diez veces mayor, y por ello no es fácil ver una mancha tan pequeña bajo una luz tan potentísima. Aunque Averroes, en su paráfrasis a Ptolomeo, recuerda que

1. El tránsito de Venus delante del Sol fue observado por primera vez —mediante un telescopio— en 1639.

2. Es decir, el espesor de la esfera vendría dado por la razón del diámetro del epiciclo al diámetro de la esfera o, en el diagrama adjunto, por la distancia entre el más interno y el más externo de los tres círculos concéntricos.



3. La sucesión de los círculos orbitales según sus perigeos y apogeos puede ser representada en el diagrama siguiente, que ha sido dibujado a escala.



había visto algo negruzco, cuando observó la conjunción del Sol y Mercurio que había calculado. Y por ello opinan que estas dos estrellas se mueven por debajo del círculo solar.

Pero cuán poco firme y cierto es este razonamiento se manifiesta en que siendo la distancia hasta el perigeo lunar, según Ptolomeo de 38 unidades, de las que una unidad es del centro de la Tierra a su superficie [el radio], pero según una estimación más veraz son más de 49 (como se mostrará más tarde), sin embargo sabemos que en tan gran espacio no hay contenida ninguna otra cosa nada más que aire y, si se quiere, incluso lo que llaman elemento ígneo. Además, el diámetro del círculo [del epiciclo] de Venus, por el que se separa [digresión angular] del Sol XLV grados más o menos a cada lado, debe ser seis veces mayor que la distancia desde el centro de la Tierra al ápside inferior de aquél, como se demostrará en su lugar.[1] ¿Qué dirán, pues, que hay contenido en un espacio tan grande como para que contenga la Tierra, el aire, el éter, la Luna y Mercurio? Y, además, ¿qué albergaría aquel ingente epiciclo de Venus, si girase alrededor de la Tierra inmóvil?

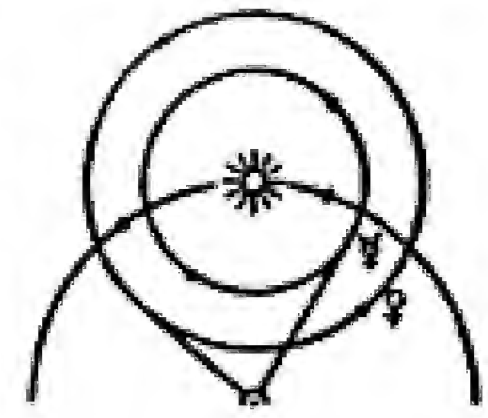
También se manifiesta poco convincente aquella argumentación de Ptolomeo, según la cual debería ocupar el Sol una posición media entre los planetas que se separan [elongación angular] en todos los sentidos y los que no se separan,[2] puesto que la Luna al separarse ella misma en todos los sentidos, muestra su falsedad. Pero ¿qué causa alegarán los que ponen bajo el Sol a Venus y después a Mercurio, o los separan en otro orden, puesto que no realizan circuitos separados y diferentes del Sol como las demás estrellas errantes, a no ser que la relación entre velocidad y lentitud no falsee el orden?

En consecuencia, será necesario o que la Tierra no sea el centro, al que se refiere el orden de los astros y de los orbes, o no habrá, ni aparecerá, una razón segura de orden, por la que la posición superior es debida más a Saturno que a Júpiter o a cualquier otro. Por ello creo que no debe despreciarse en absoluto lo que opinó Martianus Capella, que escribió una enciclopedia, y algunos otros latinos. Pues pensaron que Venus y Mercurio giran alrededor del Sol, que está en el centro, y juzgan que por esta causa no se apartan de él más de lo que les permite la convexidad de sus orbes: por lo que no rodean a la Tierra, como los demás, sino que sus ápsides giran en otros sentidos. Pues, ¿qué otra cosa quieren decir sino que el centro de aquellos orbes está alrededor del Sol? Así, la órbita de Mercurio conviene que esté encerrada dentro de la órbita de Venus, que es mayor en más del doble, y tendrá por esa misma amplitud un lugar suficiente para ella.[3]

1. Según Ptolomeo, la razón del radio del epiciclo de Venus al radio de su excéntrica se halla entre 2 a 3 y 3 a 4, o aproximadamente 43 $\frac{1}{6}$ a 60. Como en el perigeo el epiciclo se resta de la distancia media, o radio del círculo excéntrico, y en el apogeo se suma a la distancia media, la razón de la distancia de Venus en el perigeo y en el apogeo es aproximadamente de 1 a 6. Es decir, en el paso del apogeo al perigeo, la razón del aumento en la magnitud aparente del planeta debería ser aproximadamente de 36 a 1, ya que la magnitud aparente varía inversamente a la razón del cuadrado de la distancia. Pero no se observa tal aumento en la magnitud del planeta. Esta oposición entre una apariencia y las consecuencias de una hipótesis hecha para salvar otra apariencia aún está presente en el propio esquema de Copérnico.

2. Ptolomeo hace que los centros de los epiciclos de Venus y de Mercurio viajen alrededor de la Tierra longitudinalmente con el mismo ritmo que el Sol medio, y de tal manera que éste se halle siempre sobre la recta que se extiende desde el centro de la Tierra a los centros de sus epiciclos, en tanto que los centros de los epiciclos de los planetas superiores podrían estar a cualquier distancia angular del Sol medio.

3. Tal como en el siguiente diagrama, que ha sido dibujado a escala.



Si alguien, aprovechando esto como ocasión, relacionara también Saturno, Júpiter y Marte con aquel mismo centro, entendiendo su magnitud tan grande que puede contener lo que en ellos hay y rodear a la Tierra, no se equivocará. Esto lo demuestra la relación existente en la tabla de sus movimientos.[1] Pues consta que están siempre más cerca de la Tierra alrededor de su salida vespertina, esto es, cuando están en oposición al Sol, mediando la Tierra entre ellos y el Sol; en cambio, están más lejos de la Tierra en

1. Considérese el caso de Marte. Según Ptolomeo, la razón de su epiciclo a su excéntrica es 39 ½ a 60, o aproximadamente 2 a 3. Marte tiene 37 ciclos de anomalía, o movimiento sobre el epiciclo, y 42 ciclos de longitud, o movimiento del epiciclo sobre la excéntrica, en 79 años solares; o, para simplificar, digamos que la razón del movimiento del Sol al de los planetas es de 2 a 1. Copérnico sugiere aquí que si el centro del movimiento del planeta está situado alrededor del Sol en movimiento, entonces los ciclos ptolemaicos de anomalía representarían el número de veces que el Sol ha superado al planeta en longitud: así, los 37ciclos de anomalía más los 42 ciclos de longitud suman los de las 79 revoluciones solares. Es decir, el Sol estará viajando ahora alrededor de la Tierra en un círculo que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo de Marte según Ptolomeo y tiene un epiciclo que tiene la misma magnitud relativa que el círculo excéntrico de Marte según Ptolomeo, sobre el cual epiciclo Marte viaja en la dirección opuesta con una velocidad que es la mitad de la del Sol. Según ambas hipótesis, la apariencia desde la Tierra será la misma, tal como se ve en los diagramas siguientes.

En efecto, tal como en la hipótesis ptolemaica, supóngase que la Tierra está en el centro de los círculos aproximadamente concéntricos del Sol, Marte y la eclíptica. Sea el radio del epiciclo del planeta al radio de la excéntrica del planeta como 2 a 3. Ahora, en primer lugar, supongamos el Sol visto al principio de Leo, y supóngase que el planeta en el perigeo de su epiciclo se ve al comienzo de Acuario, en oposición al Sol. A continuación, supóngase que el Sol se desplaza 240 grados hacia el este, hasta el comienzo de Aries; y supóngase que durante el mismo intervalo el epiciclo se mueve 120 grados hacia el este, hasta el comienzo de Géminis, y el planeta 120 grados hacia el este sobre el epiciclo. Ahora, el planeta será visto en Tauro, a unos 36 grados al oeste del Sol.

Pero, si de conformidad con la hipótesis semicopernicana se hace que el Sol gire alrededor de la Tierra en un círculo que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo ptolemaico de Marte, en tanto que Marte se halla en un epiciclo que tiene la misma magnitud relativa que su excéntrica ptolemaica y tiene su centro en el Sol; y si la posición aparente de Marte y el Sol son al principio las mismas de antes y el Sol se desplaza 240 grados al este, a lo largo de la deferente de Marte, mientras Marte se mueve 120 grados al oeste en su epiciclo, entonces Marte volverá a ser hallado en Tauro, aproximadamente a 36 grados al oeste del Sol.

HIPÓTESIS PTOLEMAICA

Movimiento del Sol = 240°
Movimiento de la excéntrica = 120°
Movimiento del epiciclo = 120°

HIPÓTESIS SEMICOPERNICANA

Movimiento del Sol = 240°
Movimiento de Marte = 120°

el ocaso vespertino, cuando se ocultan cerca del Sol, mientras tenemos al Sol entre ellos y la Tierra. Lo que indica suficientemente que su centro remite más al Sol y alrededor del cual realizan sus giros Venus y Mercurio.[1]

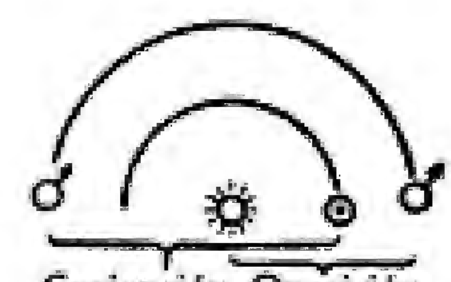
Pero al sustentarse todos en un solo centro, es necesario que el espacio que queda entre el orbe convexo de Venus y el cóncavo de Marte, sea considerado también como un orbe o una esfera, homocéntrica con aquéllos, con respecto a las dos superficies, y que contenga a la Tierra, a su acompañante la Luna, y todo lo que está contenido bajo el globo lunar. De ningún modo podemos separar de la Tierra a la Luna, que está, fuera de toda discusión, muy próxima a ella, sobre todo habiendo hallado en este espacio un lugar adecuado y suficientemente amplio para ella. Por ello no nos avergüenza confesar que este todo que abarca la Luna, incluido el centro de la Tierra, se traslada a través de aquella gran órbita entre las otras estrellas errantes, en una revolución anual alrededor del Sol, y alrededor del mismo está el centro del mundo: por lo que permaneciendo el Sol inmóvil, cualquier cosa que aparezca relacionada con el movimiento del Sol puede verificarse aún mejor con la movilidad de la Tierra; pero la magnitud del mundo es tan grande que, aunque la distancia de la Tierra al Sol tenga una dimensión bastante evidente con respecto a cualquier otra órbita de las estrellas errantes en razón de sus magnitudes, no aparece como perceptible con respecto a la esfera de las estrellas fijas. Creo que esto es más fácil de conceder, que distraer la inteligencia con aquélla casi infinita multitud de órbitas, como están obligados a realizar, quienes detuvieron a la Tierra en el centro del mundo. Más bien hay que seguir la sagacidad de la naturaleza, que así como evitó al máximo que se produjera algo superfluo e inútil, del mismo modo adornó a veces una misma cosa con muchos efectos.

Siendo todo esto muy difícil y casi inconcebible, y por supuesto contra la opinión de la mayoría, sin embargo, al avanzar, con la ayuda de dios, lo haremos más claro que el mismo Sol, sobre todo para los que no ignoran el arte de las matemáticas. Por lo que permaneciendo a salvo la primera razón (pues nadie alegará una mas conveniente que la de medir la magnitud de las órbitas por la cantidad de tiempo), el orden de las esferas se sigue de esta manera, empezando por la más alta.

La primera y más alta de todas es la esfera de las estrellas fijas, que se contiene a sí misma y a todas las cosas, y por ello es inmóvil: es, pues, el lugar del universo, con respecto a la cual se relaciona el movimiento y la posición de todos los demás astros. Pues, si algunos consideran que ella también se mueve de algún modo, nosotros atribuiremos [ese movimiento], aunque así lo parezca, a otra causa, en la deducción del movimiento terrestre. Sigue Saturno, el primero de los astros errantes, que completa su circuito en treinta años. Después de éste Júpiter, que se mueve en una revolución de doce años. Después Marte, que gira en dos años. En este orden, la revolución anual ocupa la cuarta posición, en dicha revolución dijimos que está contenida la Tierra jun-


Conjunción, Oposición,
según Ptolomeo

1. Copérnico se pregunta por qué razón los planetas siempre se hallan en sus apogeos en el momento de conjunción con el Sol, y en sus perigeos en el momento de oposición, ya que de acuerdo con el esquema ptolemaico la situación inversa también es posible —tal como se muestra en el siguiente diagrama. Pero si el Sol y no la Tierra es el centro de los movimientos del planeta, la razón es obvia.


Conjunción, Oposición,
según Copérnico

to con la órbita de la Luna como epiciclo. En quinto lugar está Venus, que vuelve al punto de partida en el noveno mes. Finalmente, el sexto lugar lo tiene Mercurio, que se mueve en un espacio de ochenta días.[1]

1. Para ver cómo Copérnico dedujo la duración de sus períodos de revolución, considérense las siguientes razones ptolemaicas para los planetas inferiores:

	Ciclos de anomalía	*Ciclos de longitud*	*Años solares*
Mercurio	145	46 +	46 +
Venus	5	8 –	8 –

Resulta notable que el número de ciclos de longitud en un año sea igual al número de ciclos solares. Además, los dos planetas tienen una elongación angular limitada respecto al Sol. Para explicar estas dos peculiaridades, Copérnico hace que la Tierra se mueva en la circunferencia de un círculo que encierra las órbitas de Venus y de Mercurio, con el Sol en el centro de las tres órbitas. Entonces, los ciclos de anomalía del planeta en tantos años se convierten en el número de veces que el planeta avanza a la Tierra, a medida que ambos giran alrededor del Sol. Es decir, en tantos años solares el planeta habrá viajado alrededor del Sol un número de veces que es igual a la suma de sus ciclos de anomalía y de sus ciclos de longitud. Así, por ejemplo, Venus viaja alrededor del Sol aproximadamente 13 veces en 8 años solares; por lo tanto, su período de revolución es aproximadamente de 7 ½ meses; y, análogamente, el de Mercurio es aproximadamente 88 días; aunque por alguna oscura razón Copérnico escribe en realidad 9 meses para Venus («nono mense reducitur») y 80 días para Mercurio («octaginta dierum spatio circumcurrens»).

El lector puede intuir de los siguientes diagramas la equipolencia, con respecto a las apariencias, de las explicaciones ptolemaica y copernicana del movimiento de Venus.

Ahora, según la hipótesis de Ptolomeo, consideremos la Tierra situada en el centro de la eclíptica, el círculo solar y el círculo orbital de Venus, que lleva el epiciclo planetario. El radio del epiciclo es al del círculo orbital aproximadamente como 3 es a 4. Supongamos primero que el Sol está situado en el medio de Escorpio, y supongamos Venus en conjunción con el Sol y en el perigeo de su epiciclo. Supongamos a continuación que el Sol se desplaza 180 grados hacia el este hasta el medio de Tauro, y análogamente el centro del epiciclo; durante este mismo intervalo, el planeta se desplazará 112½ grados hacia el este sobre su epiciclo y aparecerá aproximadamente en medio de Aries, es decir, unos 30 grados al oeste del Sol.

Pero, según la hipótesis de Copérnico, coloquemos el Sol en el centro de los círculos orbitales de Venus y la Tierra, que conservan las magnitudes relativas del epiciclo ptolemaico y el círculo orbital de Venus, pero mantengamos la Tierra en el centro de la eclíptica, en lo que se refiere a las apariencias, ya que la distancia entre la Tierra y el Sol es imperceptible en comparación con la magnitud de la esfera de las estrellas fijas. Ahora, si la Tierra se coloca en el centro de Tauro, vista desde el Sol, y el planeta está en su perigeo entre la Tierra y el Sol, de tal manera que Venus y el Sol aparecerían en medio de Escorpión, mientras Venus se mueve 292½ grados hacia el este, entonces el Sol aparecerá en el centro de Tauro, y el mismo planeta en medio de Aries, es decir, a unos 30 grados al oeste del Sol.

Pero volvamos a los tres planetas superiores

	Ciclos de anomalía	*Ciclos de longitud*	*Años solares*
Marte	37	42 +	79 –
Júpiter	65	6 –	71 –
Saturno	57	2 +	59 –

Aquí, resulta notable que según la hipótesis ptolemaica la suma de las revoluciones del círculo excéntrico y de las revoluciones en la anomalía es igual al número de ciclos solares; y también que las conjunciones con el Sol tiene lugar en el apogeo del planeta, y las oposiciones en su perigeo.

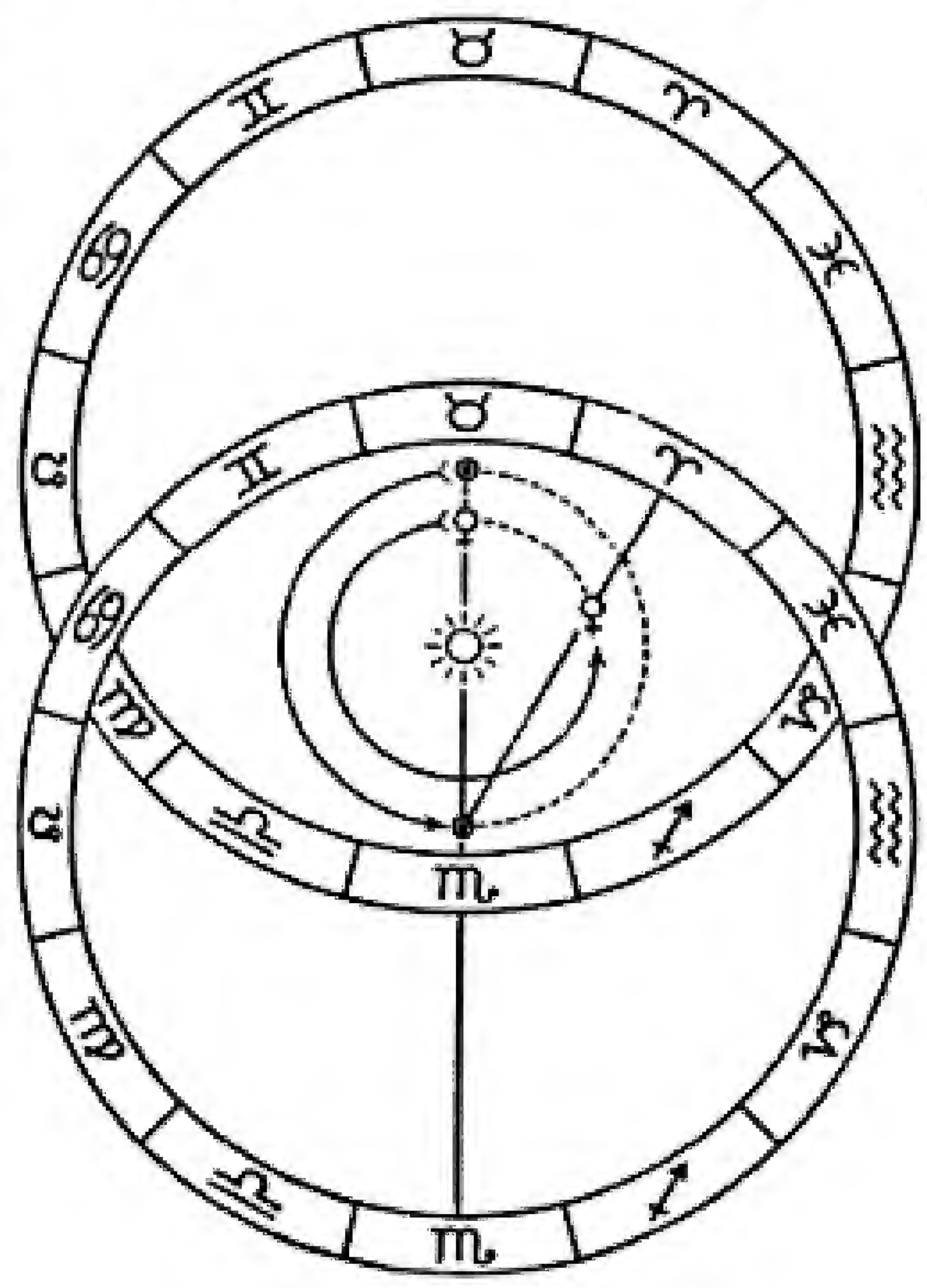
Pero según Copérnico, los ciclos ptolemaicos de anomalía representarán ahora el número de veces que la Tierra ha avanzado al planeta, y el período de revolución en longitud quedará solo. Así, por ejemplo, Saturno tendrá dos revoluciones en longitud en 59 años, o una revolución alrededor del Sol en unos 30 años. El planeta estará girando directamente sobre su círculo excéntrico en lugar de girar sobre su epiciclo ptolemaico, y la Tierra estará girando ahora en un círculo interior que tiene la misma magnitud relativa que el epiciclo anterior. Naturalmente, aquí las dos hipótesis también resultan equipolentes, en lo que respecta a las apariencias.

Y en medio de todo permanece el Sol. Pues ¿quién en este bellísimo templo pondría esta lámpara en otro lugar mejor, desde el que pudiera iluminar todo? Y no sin razón unos le llaman lámpara del mundo, otros mente, otros rector. Trimegisto le llamó «dios visible», Sófocles, en Electra, «el que todo lo ve». Así, en efecto, como sentado en un solio real, gobierna la familia de los astros que lo rodean. Tampoco la Tierra es privada en manera alguna de los servicios de la Luna, pero, como dice Aristóteles en *De Animalibus*, la Luna tiene con la Tierra un gran parentesco. A su vez la Tierra concibe del Sol y se embaraza en un parto anual.

Por consiguiente, encontramos bajo esta ordenación una admirable simetría del mundo y un nexo seguro de armonía entre el movimiento y la longitud de las órbitas, como no puede encontrarse de otro modo.[1] Aquí es posible advertir al observador

En otras palabras, al construir una teoría para dar razón de cuatro coincidencias que quedaban inexplicadas en Ptolomeo, a saber, 1) la igualdad entre el número de ciclos en longitud y los ciclos solares, en los dos planetas inferiores; 2) la igualdad entre los ciclos solares y la suma de los ciclos de anomalía y longitud, en los planetas superiores; 3) la separación angular limitada entre Mercurio y Venus y el Sol; y 4) las conjunciones en el apogeo y las oposiciones en el perigeo de Saturno, Júpiter y Marte, Copérnico ha proyectado los círculos excéntricos de Venus y Mercurio en el círculo orbital de la Tierra, y además ha colapsado los tres epiciclos de Saturno, Júpiter y Marte sobre este mismo círculo. Es decir, ahora un círculo desempaña el papel de cinco círculos anteriores.

HIPOTESIS COPERNICANA

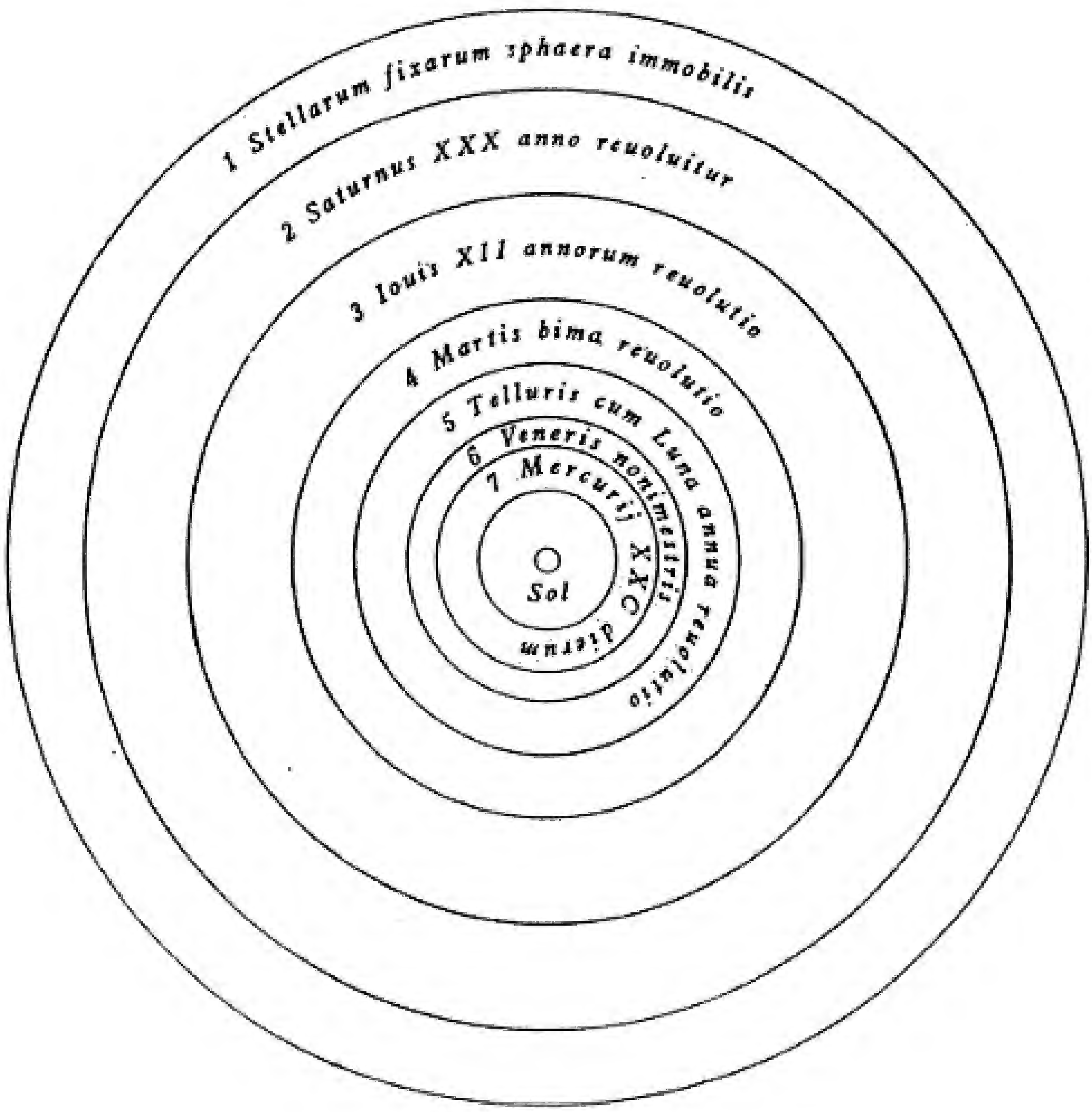


Movimiento de la Tierra = 180°
Movimiento de Venus = $292^{1}/_{2}$°

1. Recordemos las razones ptolemaicas entre el radio del epiciclo y el del círculo excéntrico, y las excentricidades correspondientes.

	Epiciclo	*Excéntrico*	*Excentricidad*
Mercurio	$22^{1}/_{2}$	60	3
Venus	$43^{1}/_{6}$	60	$1^{1}/_{4}$
Marte	$39^{1}/_{2}$	60	6
Júpiter	$11^{1}/_{2}$	60	$2^{2}/_{5}$
Saturno	$6^{1}/_{2}$	60	$3^{1}/_{4}$

En el esquema ptolemaico es imposible calcular las magnitudes relativas de los círculos excéntricos, ya que no hay ninguna medida común a todos ellos. Pero ahora que los círculos excéntricos de Mercurio y de Venus y los epiciclos de Marte, Júpiter y Saturno han sido reducidos al círculo orbital de la Tierra, es fácil



atento por qué aparece mayor la progresión y la retrogradación en Júpiter que en Saturno y menor que en Marte, y a la vez mayor en Venus que en Mercurio.[1] Ypor qué tal flujo y reflujo aparece más frecuentemente en Saturno que en Júpiter y más raramente en Marte y en Venus que en Mercurio.[2] Además, por qué Saturno, Júpiter y Marte

---

calcular las magnitudes relativas de los círculos orbitales —que ahora son los epiciclos de los planetas inferiores y los círculos excéntricos de los superiores—, ya que, por razón de la necesaria conmensurabilidad entre epiciclo y excéntrico, todos ellos son conmensurables con el círculo orbital de la Tierra. Así, por ejemplo, si tomamos la distancia de la Tierra al Sol como unidad, los planetas observarán las siguientes distancias aproximadas respecto al Sol.

Mercurio	1/3	Tierra	1	Júpiter	5
Venus	3/4	Marte	1 1/2	Saturno	9

1. En los tres planetas superiores, los ángulos que miden la progresión y la retrogradación aparentes tienen como vértice el centro del planeta y como lados las tangentes trazadas al círculo orbital del planeta. Es fácil ver que, de acuerdo con las magnitudes relativas de los círculos orbitales, los arcos de progresión y retrogradación parecerán menores en Saturno que en Júpiter, y mayores en Venus que en Mercurio.

2. Los intercambios de progresión y retrogradación son proporcionales al número de veces que la Tierra avanza a los planetas exteriores y que los planetas interiores avanzan a la Tierra. Ahora la Tierra avanza a

acrónicos están más cerca de la Tierra que en las proximidades de su ocultación y aparición. Pero sobre todo Marte, cuando dura toda la noche [en oposición al Sol], parece igualar en magnitud a Júpiter (distinguible sólo por su color rojizo), sin embargo, en otro sitio se le encuentra con dificultad entre las estrellas de segunda magnitud,[1] buscándole con una observación cuidadosa por medio de sextantes. Todo ello procede de la misma causa, que está en el movimiento de la Tierra.

Puesto que ninguna de estas cosas aparece en las fijas, demuestra su inmensa altitud, lo que también hace que se desvanezca ante nuestros ojos la órbita del movimiento anual y su imagen; porque todo lo visible tiene alguna longitud dentro de una distancia, más allá de la cual no se ve, como se demuestra en óptica. Pues, que desde el más alto de los astros errantes, Saturno, hasta la esfera de las estrellas fijas hay una gran distancia, lo demuestran sus destellantes luces. Por este indicio se distinguen sobre todo de los planetas, pues entre los que se mueven y los que no se mueven convenía que hubiera la máxima diferencia. Tan admirable es esta divina obra del Óptimo y Máximo [Hacedor].

11. DEMOSTRACIÓN DEL TRIPLE MOVIMIENTO DE LA TIERRA

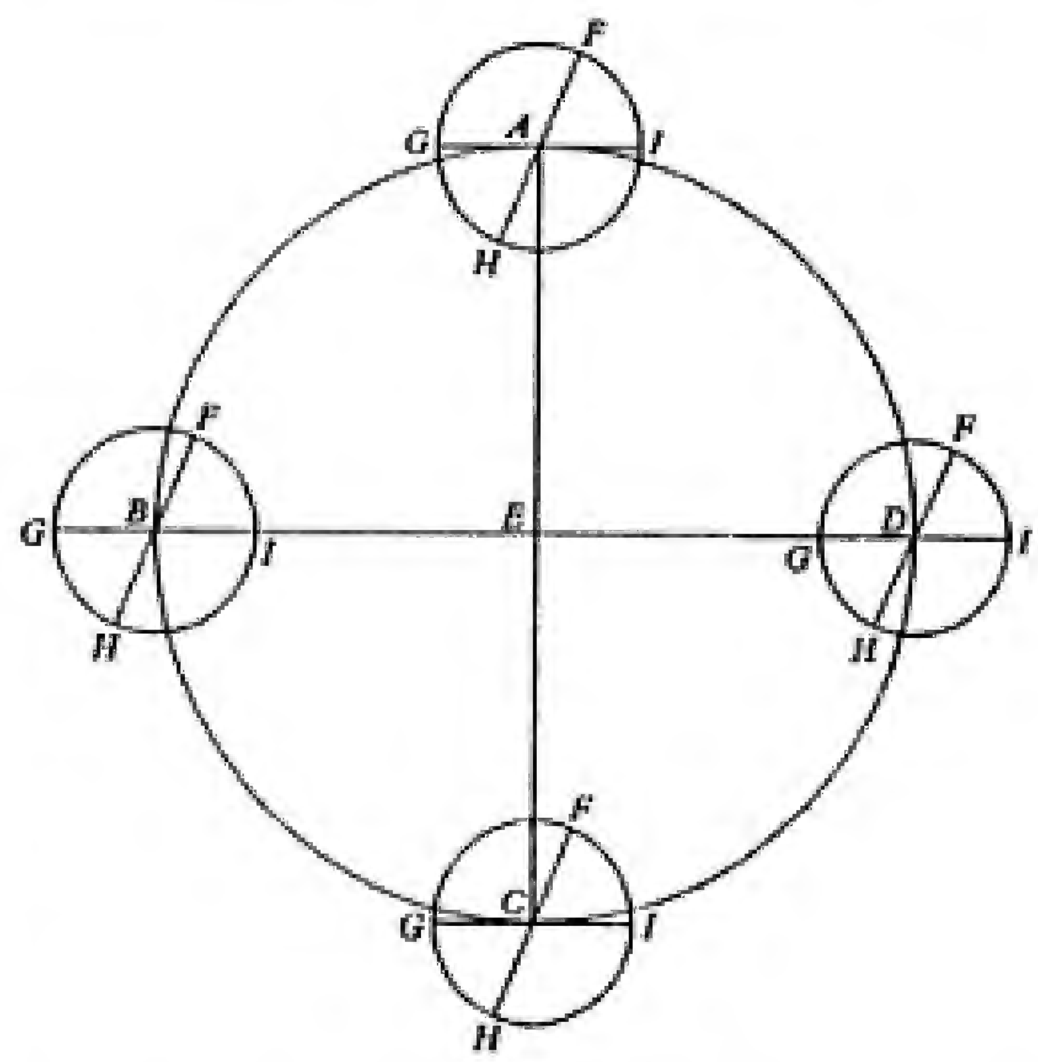
En consecuencia, como tantos y tan grandes testimonios de las estrellas errantes concuerdan con la movilidad terrestre, expondremos ahora tal movimiento en resumen, demostrando al menos los fenómenos aparentes mediante el mismo como hipótesis. Es necesario admitir un triple movimiento. El primero, el que hemos dicho que era llamado νυχθημερινόν por los griegos, el circuito del día y de la noche, que se dirige del ocaso al orto alrededor del eje de la Tierra, en cuanto se considera que el mundo es llevado en la dirección opuesta, describiendo el círculo equinoccial, al que algunos llaman equidial, imitando la significación de los griegos, entre los que se llama ἰσημερινός. El segundo es el movimiento anual del centro, el cual describe el círculo de los signos alrededor del Sol, de modo semejante del ocaso al orto, esto es, del oeste al este, avanzando entre Venus y Marte (como se ha dicho) con los cuerpos que le acompañan. Esto hace que el mismo Sol, con un movimiento similar, parezca atravesar el zodíaco. Por ejemplo, de este modo, al pasar el centro de la Tierra por Capricornio, el Sol parece atravesar Cáncer, al pasar por Acuario, en Leo, y así sucesivamente (como decíamos). Es necesario entender que el círculo equinoccial y el eje de la Tierra tienen una inclinación variable con respecto a este círculo, que pasa por la mitad de los signos, y su plano [plano de la eclíptica]. Porque si permanecieran fijos y no siguiesen sino el movimiento del centro, no aparecería ninguna desigualdad entre los días y las noches, sino que sería o solsticio de verano o de invierno, o equinoccio, o verano, o invierno, o cualquier otra forma del tiempo permanece-

Saturno más a menudo que Júpiter, Júpiter más a menudo que Marte, a Marte más a menudo que es avanzada por Venus, y avanzada menos a menudo por Venus que por Mercurio. De aquí que la frecuencia de progresión y retrogradación estén en este orden.

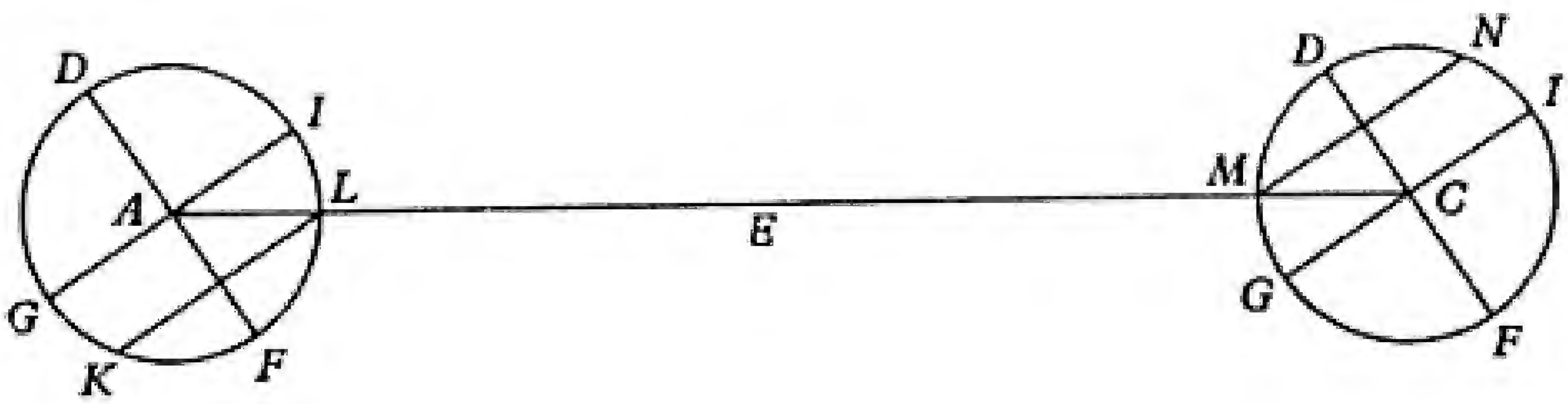
1. Según el esquema ptolemaico, sólo a partir de los cambios de magnitud del planeta Marte puede deducirse cuáles son sus distancias relativas a la Tierra en el perigeo y el apogeo. Pero según el esquema copernicano, se sigue de las distancias relativas del planeta en el perigeo y en el apogeo —que están en la proporción de 1 a 5— que el diámetro aparente del planeta debería variar inversamente a esta proporción, suponiendo que el planeta pudiera verse cuando está en conjunción con el Sol.

ría igual a sí misma. Luego, sigue el tercer movimiento, el de declinación, también una revolución anual, pero hacia el oeste, esto es, retrocediendo al contrario del movimiento del centro. Y así, a causa de estos dos movimientos casi iguales y contrarios entre sí, sucede que el eje de la Tierra y, en ella misma el mayor de los paralelos, el ecuador, miran siempre casi hacia la misma parte del mundo, y de ahí que permanezcan como inmóviles. Entretanto el Sol parece moverse por la oblicuidad de la eclíptica, con el mismo movimiento que el centro de la Tierra, y no de otra manera que si éste [el centro de la Tierra] fuera el centro del mundo, con tal de que recuerdes que la distancia entre el Sol y la Tierra en comparación con la esfera de las estrellas fijas excede ya a nuestra vista.

Como estas cosas son de tal manera, que más desean ser comprendidas por los ojos que dichas, tracemos el círculo ABCD, que representará el circuito anual del centro de la Tierra en el plano de la eclíptica, y sea E el Sol, el centro del mismo. Este círculo lo cortaré en cuatro partes con los diámetros AEC y BED. Ocupe el punto A el principio de Cáncer, B el de Libra, C el de Capricornio, D el de Aries. Y pongamos el centro de la Tierra primero en A, sobre el cual dibujaré el ecuador terrestre FGHI, pero no en el mismo plano, sino que el diámetro GAI sea la sección común de los círculos, me refiero al ecuador y a la eclíptica. Trazado también el diámetro FAH, formando ángulos rectos [perpendicular] con el GAI, sea F el límite de declinación máxima austral, y H boreal. Así dispuestas correctamente estas cosas, los terrestres verán el Sol, que está en el centro E, en el solsticio de invierno bajo Capricornio, que produce H, máxima declinación boreal vuelta hacia el Sol, porque la declinación del ecuador con respecto a la línea AE, por medio de la revolución diurna, describe el trópico de invierno paralelo al ecuador, según la distancia comprendida por el ángulo de inclinación EAH. Avance ahora el centro de la Tierra hacia el este, y al mismo tiempo F, límite de la declinación máxima, hacia el oeste, hasta que en B ambos hayan recorrido cuadrantes de círculo. Mientras tanto, el ángulo EAI permanecerá siempre igual al AEB, por la igualdad de las revoluciones, y los diámetros siempre permanecerán paralelos uno a otro, FAH a FBH, GAI a GBI y el ecuador al ecuador. Por la causa ya dicha varias veces, estas mismas cosas aparecen en la inmensidad del cielo. En consecuencia, desde B, principio de Libra, E aparecerá bajo Aries, y la sección común de los círculos coincidirá con la línea GBIE, con respecto a la cual la revolución diurna no admite ninguna declinación, sino que toda declinación estará en los lados [de dicha línea]. Y así el Sol aparecerá en el equinoccio de primavera. Prosiga el centro de la Tierra, bajo las condiciones aceptadas y una vez recorrido un semicírculo, hasta C, entonces aparecerá el Sol al entrar en Cáncer. Pero F, declinación austral del círculo equinoccial, vuelta hacia el Sol, hará que aquél se vea al norte, recorriendo el trópico de verano, en relación con el ángulo de inclinación ECF. Girando de nuevo F hacia el tercer cuadrante del círculo, la sección común GI caerá de nuevo en la línea ED, por lo que el Sol, visto en Libra, parecerá haber completado el equinoccio de otoño. Pero después, en este mismo proceso, volviéndose



H poco a poco hacia el Sol, regresará a la posición del principio, desde donde empezamos a avanzar.



Otro procedimiento. Sea, de nuevo, en el plano supuesto, AEC el diámetro y la sección común del círculo ABC perpendicular al mismo plano. En éste, alrededor de A y C, esto es, en Cáncer y Capricornio, trácese el círculo de la Tierra que pasa por los polos DGFI, y sea DF el eje de la Tierra, D el polo norte, F el sur, y GI el diámetro del ecuador. En consecuencia, cuando F gira hacia el Sol, que está en E, y la inclinación del círculo equinoccial es boreal según el ángulo IAE, entonces el movimiento alrededor del eje describirá el paralelo austral al ecuador, según el diámetro KL y la distancia LI, que aparecerá con respecto al Sol como el trópico de Capricornio. O sea, para decirlo más correctamente, este movimiento alrededor del eje en dirección a AC forma una superficie cónica, que tiene el vértice en el centro de la Tierra y como base un círculo paralelo al ecuador;[1] en el opuesto punto C también sucede todo de igual forma, pero al revés. En consecuencia, es patente de qué modo estos dos movimientos que se oponen entre sí, me refiero al del centro y al de la inclinación, obligan al eje de la Tierra a permanecer en el mismo balanceo y en una posición similar, y les dan a todos una apariencia de movimientos solares.

Pero decíamos que las revoluciones anuales, la del centro y la de declinación, eran casi iguales, pues si esto ocurriera con exactitud sería necesario que los puntos equinocciales y solsticiales y la oblicuidad total de la eclíptica con respecto a la esfera de las estrellas fijas no cambiaran nunca. Pero, siendo muy pequeña la diferencia, no se manifiesta, a no ser en un tiempo grande: desde Ptolomeo hasta nosotros hay casi XXI grados en los que aquéllos [equinoccios y solsticios] se anticipan [precesión]. Por esta causa, algunos creyeron que también se movía la esfera de las estrellas fijas, por lo que les pareció que había una novena esfera superior; y no bastando esto, ahora los más modernos añaden una décima, sin haber alcanzado el fin que nosotros esperamos conseguir por medio del movimiento de la Tierra, que como principio e hipótesis usaremos en las demostraciones de los otros movimientos.

1. O, en otras palabras, el eje del ecuador terrestre describe alrededor del eje de la eclíptica terrestre una doble superficie cónica que tiene sus vértices en el centro de la Tierra, en un período de revolución aproximadamente igual al del centro de la Tierra.

12. DE LAS LÍNEAS RECTAS QUE SE SUBTIENDEN EN UN CÍRCULO

Hemos resumido lo que de la filosofía natural nos parecía necesario para nuestro propósito, como principios e hipótesis, a saber, que el mundo es esférico, inmenso, semejante al infinito, también que la esfera de las estrellas fijas que contiene a todas las cosas es inmóvil, y en cambio que el movimiento de los demás cuerpos celestes es circular. Aceptamos también que la Tierra es móvil según ciertas revoluciones, con lo que intentamos estructurar toda la ciencia de los astros como sobre una primera piedra. Pero, puesto que las demostraciones que usamos en casi todo el trabajo, versan sobre líneas rectas y arcos, sobre triángulos planos y convexos, de los cuales, aunque muchas cosas están ya claras en los *Elementos* de Euclides, sin embargo no tienen lo que aquí sobre todo se investiga: de qué modo pueden deducirse los lados a partir de los ángulos y los ángulos a partir de los lados, puesto que un ángulo no mide a la cuerda, como tampoco la cuerda al ángulo, sino el arco. Por lo que se ha encontrado el procedimiento por el que se pueden conocer las cuerdas subtensas a cualquier arco, con la ayuda de las cuales es posible calcular el arco correspondiente a un ángulo y, al contrario, por el arco se puede calcular la cuerda que subtiende al ángulo. Por lo cual no parece fuera de lugar si en este libro tratamos de tales líneas, y también de los lados y los ángulos tanto de los triángulos planos como de los esféricos, que ya Ptolomeo enseñó esparcidamente y por medio de ejemplos, de modo que aquí se resuelva ya de una vez y después de que los hayamos tratado, queden más claros.

Dividimos el círculo, por consenso común entre los matemáticos, en CCCLX grados. Pero los antiguos tomaban un diámetro de 120 unidades. En cambio, los posteriores, para evitar la oscuridad de las porciones fraccionadas en las multiplicaciones y divisiones de números con respecto a esas líneas, que en general son inconmensurables en longitud, y a menudo se usa su potencia, unos establecieron un diámetro racional de 1.200.000 partes, otros de 2.000.000, otros con otra medida, desde el momento en que pasaron a usarse las figuras índicas de los números. Pues este número supera a cualquier otro, sea griego o latino, acomodándose con singular rapidez en los cálculos. También nosotros, por esta causa, tomamos como suficientes las $\overline{\text{CC}}$ [200.000] unidades del diámetro, que pueden excluir un error patente. Pues con ellas se puede conseguir una aproximación, en lo que no se tiene que seguir de número a número.

Explicaremos esto con seis teoremas y un problema, siguiendo aproximadamente a Ptolomeo.

TEOREMA PRIMERO

Dado el diámetro de un círculo, se dan también los lados del triángulo, cuadrado, hexágono, pentágono y decágono, a los que circunscribe dicho círculo.

Puesto que la distancia desde el centro [radio], la mitad del diámetro, es igual al lado del hexágono, el lado del triángulo al cuadrado es igual al triple del lado del hexágono al cuadrado, y el cuadrado del lado del tetrágono es igual al doble del lado del hexágono al cuadrado, según se demostró en los *Elementos* de Euclides. Luego se dan, el lado del hexágono en lon-

gitud de c̄ [100.000] unidades, el del tetrágono de 141.422 unidades, y el del triángulo de 173.205 unidades.

Sea, ahora, AB el lado del hexágono, que por el problema I del libro II o por el X del libro VI de Euclides, en media y extrema proporción se corta en el punto C, y sea el segmento mayor CB, igual al cual se le añade BD. En consecuencia, ABD completa estará dividida en extrema y media proporción: y el segmento menor, el añadido BD, el lado del decágono inscrito en el círculo, AB el lado del hexágono; lo cual se clarificó a partir del V y IX preceptos del libro XIII de Euclides.

Pero BD se conocerá de este modo: córtese en dos partes AB en el punto E. Es patente por el III precepto del mismo libro de Euclides, que el cuadrado de EBD es igual al quíntuplo del cuadrado de EB. Pero EB se conoce con una longitud de L̄ [50.000] unidades, a partir de ella se conoce el quíntuplo de su cuadrado, y EBD con una longitud de 111.803 unidades, de las cuales, si se restan 50.000 que tiene EB, queda BD de 61.803, lado del decágono buscado.

También se conoce el lado del pentágono, el cuadrado del cual es igual a la suma de los cuadrados del lado del hexágono y del decágono, de 117.557 unidades.

Luego, dado el diámetro del círculo, se conocen los lados del triángulo, tetrágono, pentágono, hexágono y decágono inscritos en el mismo círculo. Que es lo que había que demostrar.

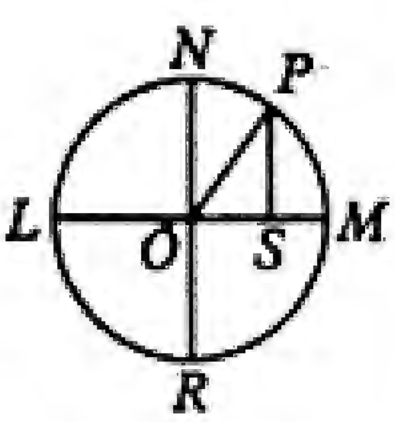
PORISMA

Por lo tanto es claro que, habiendo sido dada la cuerda de cualquier arco, se conoce también la que subtiende al arco del semicírculo.

Puesto que el ángulo en un semicírculo es recto: y en los triángulos rectángulos, el cuadrado de la subtensa al ángulo recto, esto es, el cuadrado del diámetro, es igual a la suma de los cuadrados de los ángulos que comprenden dicho ángulo recto. En consecuencia, puesto que el lado del decágono, que subtiende XXXVI grados de la circunferencia, ha sido demostrado como de 61.803 unidades, de las que el diámetro tiene $\overline{\text{CC}}$, se conoce también la recta que subtiende a los restantes CXLIIII grados del semicírculo, de 190.211 de aquellas unidades. Y en el caso del lado del pentágono, que mide 117.557 unidades del diámetro y subtiende un arco de LXXII grados, se conoce la línea recta que subtiende los restantes CVIII grados del semicírculo, de 161.803 unidades.

TEOREMA SEGUNDO ΕΙΣΑΓΩΓΟΝ [INTRODUCTORIO (AL TEOREMA III)]

Si se inscribiera un cuadrilátero en un círculo, el rectángulo comprendido por las diagonales es igual a los rectángulos comprendido por los dos pares de lados opuestos.

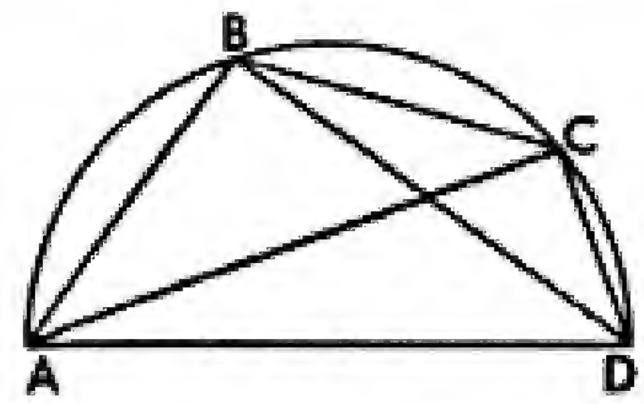


Sea, pues, ABCD un cuadrilátero inscrito en el círculo. Afirmo que el rectángulo comprendido bajo las diagonales AC y DB, es igual a los rectángulos comprendidos bajo AB, DC y bajo AD, BC. Hagamos, pues, el ángulo ABE igual al CBD. Luego, todo el ángulo ABD será igual a todo el EBC, tomando EBD común a uno y a otro.

También el ACB y el BDA son iguales entre sí por estar en el mismo segmento de círculo, y puesto que dos triángulos semejantes tendrán lados semejantes, entonces BC es a BD, como EC es a AD, y, por lo tanto, el [rectángulo] que está bajo EC y BD es igual al que está bajo BC y AD. Pero también el triángulo ABE y el CBD son semejantes, porque los ángulos ABE y CBD han sido hechos iguales, y el BAC y BDC son iguales porque abarcan el mismo arco de círculo. Sea de nuevo, AB es a BD como AE es CD, y, por lo tanto, el [rectángulo] que está bajo AB y CD es igual al que está bajo AE y BD. Pero ya se declaró que el [rectángulo] AD, BC era igual que el BD, EC. En conjunto, pues, el BD, AC es igual al AD, BC y al AB, CD. Que era oportuno demostrar.

TEOREMA TERCERO

A partir de esto, si fueran dadas rectas subtendidas a arcos desiguales en un semicírculo, la subtensa [cuerda] de este semicírculo, por la que el arco mayor excede al menor, también es dada.

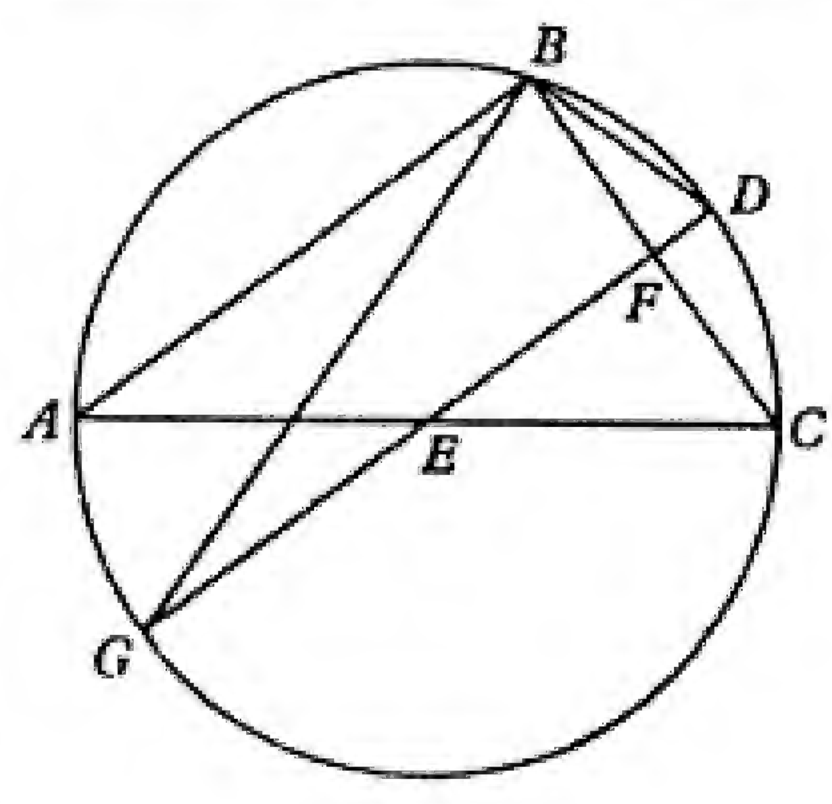


De modo que en el semicírculo ABCD, y con diámetro AD, sean conocidas AB y AC subtensas de arcos desiguales. Deseando nosotros averiguar la subtensa BC, se conocen, por lo antes dicho, las subtensas BD y CD de los arcos restantes del semicírculo, con los cuales se delimita en el semicírculo el cuadrilátero ABCD, cuyas diagonales AC y BD son conocidas, junto con los tres lados AB, AD y CD; en el cual, como ya se demostró [el rectángulo] que hay bajo AC y BD es igual a la suma del AB, CD y del AD, BC. Luego, si el [rectángulo] que está bajo AB, CD, se resta del AC, BD, quedará el AD, BC. Y así, dividiendo por AD, en cuanto es posible, se calcula la subtensa buscada BC.

De ahí que siendo conocidos, por los datos anteriores, por ejemplo los lados del pentágono y del hexágono, por esta relación se conoce la subtensa de XII grados, en los que ellos se diferencian, y que es de 20.905 de las unidades del diámetro.

TEOREMA CUARTO

Dada la recta que subtiende a un arco cualquiera, se da también la que subtiende a la mitad del arco.



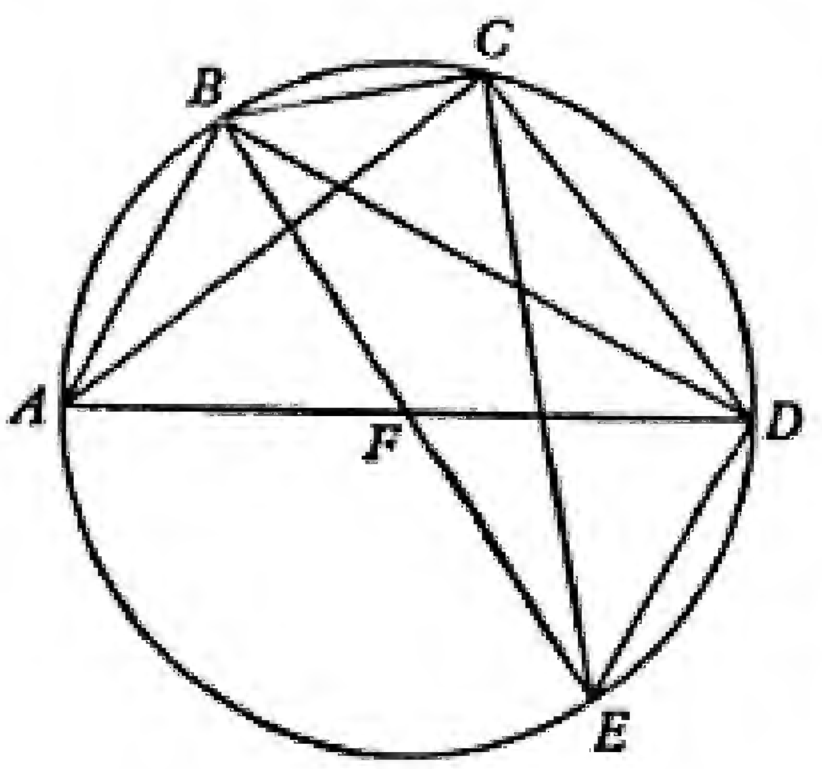
Describamos el círculo ABC, cuyo diámetro sea AC, y sea BC el arco conocido con su subtensa, y desde el centro E la línea EF corte formando ángulos rectos [perpendicularmente] a BC, que por el III precepto del libro III de Euclides cortará a BC en dos partes iguales en el punto F y, prolongándola, al arco en D, también constrúyanse las subtensas AB y BD. En consecuencia, puesto que los triángulos ABC y EFC son rectángulos y además también semejantes porque tienen un ángulo común el ECF, luego como

CF es la mitad de BFC, así EF es la mitad de AB; pero AB se conoce, porque subtiende el arco restante del semicírculo; luego, se da también EF, y DF el resto de la mitad del diámetro, el cual al completarse es DEG, y únase BG. En consecuencia, en el triángulo BDG por el ángulo recto B descienda la misma BF como perpendicular a la base. En consecuencia, el [rectángulo] que está bajo GDF [GD, DF], es igual al [cuadrado] BD; luego se da BD en longitud, que subtiende a la mitad del arco BDC.

Conociendo ya la que subtiende a XII grados, se conoce también la que subtiende a VI grados como de 10.467 unidades, y la de III grados de 5.235 unidades, y la de I grado y medio de 2.618 unidades, y la de tres cuartos de 1.309 unidades.

TEOREMA QUINTO

De nuevo, cuando se conocen las cuerdas que subtienden a dos arcos, se conoce también la que subtiende al arco completo compuesto por ellos.



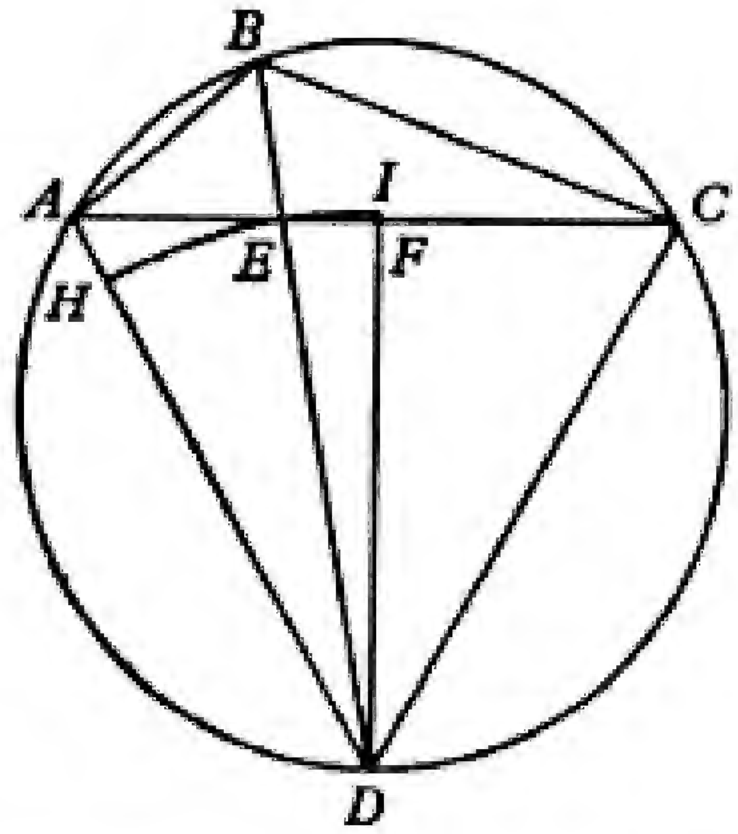
Sean AB y BC las subtensas conocidas en un círculo. Afirmo que se conoce también la que subtiende a todo el arco ABC. Dibujados los diámetros AFD y BFE, trácese también las subtensas BD y CE, que se conocen por los teoremas precedentes, a causa de que AB y BC son conocidos y DE es igual a AB. Uniendo CD ciérrese el cuadrilátero BCDE, cuyas diagonales BD y CE se conocen junto con tres lados el BC, DE y BE, y también se conocerá el restante CD por el segundo teorema, y por lo tanto se conoce la subtensa CA, que subtiende al resto del semicírculo y a todo el arco ABC: que es lo que se buscaba.

Además, como hace poco se han hallado las líneas rectas que subtienden arcos de tres, uno y medio, y tres cuartos de grado, con cuyos intervalos cualquiera puede confeccionar tablas con una relación muy exacta, aunque si quiere avanzar por medio de grados y unir un arco a otro, o por medios grados, o de cualquier otro modo, con razón dudará de las subtensas de tales grados, porque nos faltan los cálculos gráficos con los que se demuestren. Sin embargo, nada nos impide hallar el error perceptible a los sentidos y, establecido el cálculo, seguir el que menos disienta [con los admitidos]. Esto también lo investigó Ptolomeo con respecto a las subtensas de un grado y de medio, advirtiéndonos primero [de lo siguiente].

TEOREMA SEXTO

La razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].

Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, AB y BC, y sea el mayor BC. Afirmo que la razón de BC a AB es mayor que la de las subtensas BC a AB. Abarquen éstas el ángulo B, que se corta en dos por la línea BD, y unáse AC, que corta a BD en el punto E, de modo semejante únanse también AD y CD que son iguales, porque con ellas se sub-



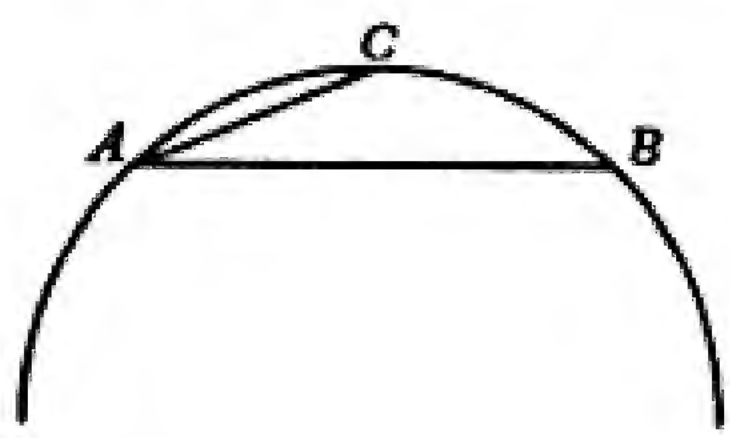
tiende arcos iguales. En consecuencia, puesto que en el triángulo ABC, la línea que corta al ángulo por la mitad, corta también a AC en el punto E, los segmentos de la base serán EC a AE como BC es a AB, y puesto que BC es mayor que AB, EC será también mayor que EA. Trácese DF perpendicular a AC, que cortará a la misma AC en el punto F, que necesariamente se encontrará en el segmento mayor EC.

Y puesto que en todo triángulo, al ángulo mayor se opone el lado mayor, en el triángulo DEF el lado DE es mayor que el DF, y además AD es mayor que DE; porque, descrito un arco, con centro en D y con un intervalo [radio] DE, cortará a AD y pasará más allá de DF. En consecuencia, córtese a AD en H y prolónguese en línea recta DFI. Entonces, puesto que el sector EDI es mayor que el triángulo EDF, y el triángulo DEA mayor que el sector DEH. Por tanto el triángulo DEF tiene con respecto al triángulo DEA una razón menor que el sector DEI con respecto al sector DEH. Pero los sectores son proporcionales a los arcos o a los ángulos en el centro, por otra parte los triángulos con el mismo vértice son proporcionales a sus bases. Por lo tanto es mayor la relación entre los ángulos EDF a ADE, que la de las bases EF a AE. En consecuencia, componiendo, el ángulo FDA es al ángulo ADE mayor que la base AF es a la base AE, y del mismo modo, CDA es a ADE mayor que AC es a AE. Pero, separando, CDE es a EDA mayor que CE a EA. Por otra parte, los ángulos CDE es a EDA, como el arco CB es al arco AB, y la base CE es a la AE como la subtensa BC es a la subtensa AB.

En consecuencia, es mayor la razón del arco CB al arco AB, que la de la subtensa BC a la subtensa AB. Que es lo que había que demostrar.

PROBLEMA

Pero puesto que el arco es siempre mayor que la subtensa a él trazada, siendo la recta la línea más corta de las que tienen los mismos extremos, con todo la desigualdad tiende a la igualdad al pasar las secciones del círculo de mayores a menores, de modo que, en el punto de contacto extremo (de tangencia) del círculo, coexisten la línea circular y la recta: en consecuencia, es necesario que, antes de que esto ocurra, difieran entre sí con una discrepancia poco manifiesta. Sea, pues, por ejemplo, AB un arco de III grados y AC uno de I grado y medio; se demostró que la subtensa AB tiene 5.235 unidades, de las que el diámetro propuesto tiene $\overline{\mathrm{cc}}$ [200.000], y AC de 2.618 de las mismas unidades. Y siendo AB el doble del arco AC, sin embargo la subtensa AB es menor que el doble de la cuerda AC, que supera en una unidad a las 2.617. Pero si tomamos AB de un grado y medio y AC de tres cuartos de grado, tendremos la subtensa AB de 2.618 unidades y AC de 1.309 unidades, que, aunque debe ser mayor que la mitad de la subtensa AB, en nada parece diferenciarse de la mitad, sino que ahora surge la misma proporción entre los arcos y las líneas rectas.



15v

Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea, no dudamos en tomar 1.309 como subtensa de tres cuartos de grado, en igual proporción con respecto a un grado y con respecto a las partes restantes [del grado], de modo que añadiendo un cuarto a los tres cuartos establezcamos la subtensa de un grado en 1.745 unidades, la de medio grado en 872 1/2 unidades, y la de un tercio en 582 unidades aproximadamente. Sin embargo, pienso que es suficiente, si sólo consignamos en la tabla las mitades de las líneas que subtienden a un arco doble. Con esta forma abreviada, comprendemos en un cuadrante, lo que era necesario extender hasta el semicírculo: y sobre todo porque resultan de uso más frecuente en la demostración y el cálculo las semicuerdas que las cuerdas. Presentamos ahora una tabla con incrementos de un sexto de grado, y que tiene tres columnas: en la primera están los grados o las unidades del arco y las sextas partes de un grado; la segunda contiene el número en longitud de la mitad de la línea que subtiende [cuerda] un arco doble; la tercera contiene la diferencia entre los mismos números en longitud que hay entre cada uno de los grados, y por medio de las cuales [las diferencias] podemos añadir proporcionalmente lo que convenga en cada una de las fracciones de los grados. Y ésta es la tabla.

Tabla de las cuerdas subtendidas en un círculo

Arcos °	Arcos '	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	Arcos °	Arcos '	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
0	10	291	291	3	20	5814	
0	20	582		3	30	6105	
0	30	873		3	40	6395	
0	40	1163		3	50	6685	
0	50	1454		4	0	6975	
1	0	1745		4	10	7265	
1	10	2036		4	20	7555	
1	20	2327		4	30	7845	
1	30	2617		4	40	8135	
1	40	2908		4	50	8425	
1	50	3199		5	0	8715	
2	0	3490		5	10	9005	
2	10	3781		5	20	9295	
2	20	4071		5	30	9585	
2	30	4362		5	40	9874	
2	40	4653		5	50	10164	
2	50	4943	290	6	0	10453	
3	0	5234		6	10	10742	289
3	10	5524		6	20	11031	

(continuación)

Arcos °	′	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*	*Arcos* °	′	*Mitades de cuerdas a arcos dobles*	*Unidades por cada grado*
6	30	11320		12	30	21644	
6	40	11609		12	40	21928	
6	50	11898		12	50	22212	
7	0	12187		13	0	22495	283
7	10	12476		13	10	22778	
7	20	12764	288	13	20	23062	
7	30	13053		13	30	23344	
7	40	13341		13	40	23627	
7	50	13629		13	50	23910	282
8	0	13917		14	0	24192	
8	10	14205		14	10	24474	
8	20	14493		14	20	24756	
8	30	14781		14	30	25038	281
8	40	15069		14	40	25319	
8	50	15356		14	50	25601	
9	0	15643		15	0	25882	
9	10	15931		15	10	26163	
9	20	16218		15	20	26443	280
9	30	16505		15	30	26724	
9	40	16792		15	40	27004	
9	50	17078		15	50	27284	
10	0	17365		16	0	27564	279
10	10	17651	286	16	10	27843	
10	20	17937		16	20	28122	
10	30	18223		16	30	28401	
10	40	18509		16	40	28680	
10	50	18795		16	50	28959	278
11	0	19081		17	0	29237	
11	10	19366	285	17	10	29515	
11	20	19652		17	20	29793	
11	30	19937		17	30	30071	277
11	40	20222		17	40	30348	
11	50	20507		17	50	30625	
12	0	20791		18	0	30902	
12	10	21076	284	18	10	31178	276
12	20	21360		18	20	31454	

(continuación)

Arcos °	Arcos ′	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	Arcos ′	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
18	30	31730		24	30	41469	
18	40	32006		24	40	41734	264
18	50	32282	275	24	50	41998	
19	0	32557		25	0	42262	
19	10	32832		25	10	42525	263
19	20	33106		25	20	42788	
19	30	33381	274	25	30	43051	
19	40	33655		25	40	43313	262
19	50	33929		25	50	43575	
20	0	34202		26	0	43837	
20	10	34475	273	26	10	44098	261
20	20	34748		26	20	44359	
20	30	35021		26	30	44620	260
20	40	35293	272	26	40	44880	
20	50	35565		26	50	45140	
21	0	35837		27	0	45399	259
21	10	36108	271	27	10	45658	
21	20	36379		27	20	45916	258
21	30	36650		27	30	46175	
21	40	36920	270	27	40	46433	
21	50	37190		27	50	46690	257
22	0	37460		28	0	46947	
22	10	37730	269	28	10	47204	256
22	20	37999		28	20	47460	
22	30	38268		28	30	47716	255
22	40	38537	268	28	40	47971	
22	50	38805		28	50	48226	
23	0	39073		29	0	48481	254
23	10	39341	267	29	10	48735	
23	20	39608		29	20	48989	253
23	30	39875		29	30	49242	
23	40	40141	266	29	40	49495	252
23	50	40408		29	50	49748	
24	0	40674		30	0	50000	
24	10	40939	265	30	10	50252	251
24	20	41204		30	20	50503	

(continuación)

Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
30	30	50754	250	36	30	59482	
30	40	51004		36	40	59716	233
30	50	51254		36	50	59949	
31	0	51504	249	37	0	60181	232
31	10	51753		37	10	60413	
31	20	52002	248	37	20	60645	231
31	30	52250		37	30	60876	
31	40	52498	247	37	40	61107	230
31	50	52745		37	50	61337	
32	0	52992	246	38	0	61566	229
32	10	53238		38	10	61795	
32	20	53484		38	20	62024	
32	30	53730	245	38	30	62251	228
32	40	53975		38	40	62479	
32	50	54220	244	38	50	62706	227
33	0	54464		39	0	62932	
33	10	54708	243	39	10	63158	226
33	20	54951		39	20	63383	
33	30	55194	242	39	30	63608	225
33	40	55436		39	40	63832	
33	50	55678	241	39	50	64056	224
34	0	55919		40	0	64279	223
34	10	56160	240	40	10	64501	222
34	20	56400		40	20	64723	
34	30	56641	239	40	30	64945	221
34	40	56880		40	40	65166	220
34	50	57119	238	40	50	65386	
35	0	57358		41	0	65606	219
35	10	57596		41	10	65825	
35	20	57833	237	41	20	66044	218
35	30	58070		41	30	66262	
35	40	58307	236	41	40	66480	217
35	50	58543		41	50	66697	
36	0	58779	235	42	0	66913	216
36	10	59014	235	42	10	67129	215
36	20	59248	234	42	20	67344	

(continuación)

Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
42	30	67559	214	48	30	74896	
42	40	67773		48	40	75088	192
42	50	67987	213	48	50	75280	191
43	0	68200	212	49	0	75471	190
43	10	68412		49	10	75661	
43	20	68624	211	49	20	75851	189
43	30	68835		49	30	76040	
43	40	69046	210	49	40	76229	188
43	50	69256		49	50	76417	187
44	0	69466	209	50	0	76604	
44	10	69675		50	10	76791	186
44	20	69883	208	50	20	76977	
44	30	70091	207	50	30	77162	185
44	40	70298		50	40	77347	184
44	50	70505	206	50	50	77531	
45	0	70711	205	51	0	77715	183
45	10	70916		51	10	77897	182
45	20	71121	204	51	20	78079	
45	30	71325		51	30	78261	181
45	40	71529	203	51	40	78442	180
45	50	71732	202	51	50	78622	
46	0	71934		52	0	78801	179
46	10	72136	201	52	10	78980	178
46	20	72337	200	52	20	79158	
46	30	72537		52	30	79335	177
46	40	72737	199	52	40	79512	176
46	50	72936		52	50	79688	
47	0	73135	198	53	0	79864	175
47	10	73333	197	53	10	80038	174
47	20	73531		53	20	80212	
47	30	73728	196	53	30	80386	173
47	40	73924	195	53	40	80558	172
47	50	74119		53	50	80730	
48	0	74314	194	54	0	80902	171
48	10	74508	194	54	10	81072	170
48	20	74702		54	20	81242	169

(continuación)

Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
54	30	81411		60	30	87036	143
54	40	81580	168	60	40	87178	142
54	50	81748	167	60	50	87320	
55	0	81915		61	0	87462	141
55	10	82082	166	61	10	87603	140
55	20	82248	165	61	20	87743	139
55	30	82413	164	61	30	87882	
55	40	82577		61	40	88020	138
55	50	82741	163	61	50	88158	137
56	0	82904	162	62	0	88295	
56	10	83066		62	10	88431	136
56	20	83228	161	62	20	88566	135
56	30	83389	160	62	30	88701	134
56	40	83549	159	62	40	88835	
56	50	83708		62	50	88968	133
57	0	83867	158	63	0	89101	132
57	10	84025	157	63	10	89232	131
57	20	84182		63	20	89363	
57	30	84339	156	63	30	89493	130
57	40	84495	155	63	40	89622	129
57	50	84650		63	50	89751	128
58	0	84805	154	64	0	89879	
58	10	84959	153	64	10	90006	127
58	20	85112	152	64	20	90133	126
58	30	85264		64	30	90258	
58	40	85415	151	64	40	90383	125
58	50	85566	150	64	50	90507	124
59	0	85717		65	0	90631	123
59	10	85866	149	65	10	90753	122
59	20	86015	148	65	20	90875	121
59	30	86163	147	65	30	90996	
59	40	86310		65	40	91116	120
59	50	86457	146	65	50	91235	119
60	0	86602	145	66	0	91354	118
60	10	86747	144	66	10	91472	118
60	20	86892		66	20	91590	117

(continuación)

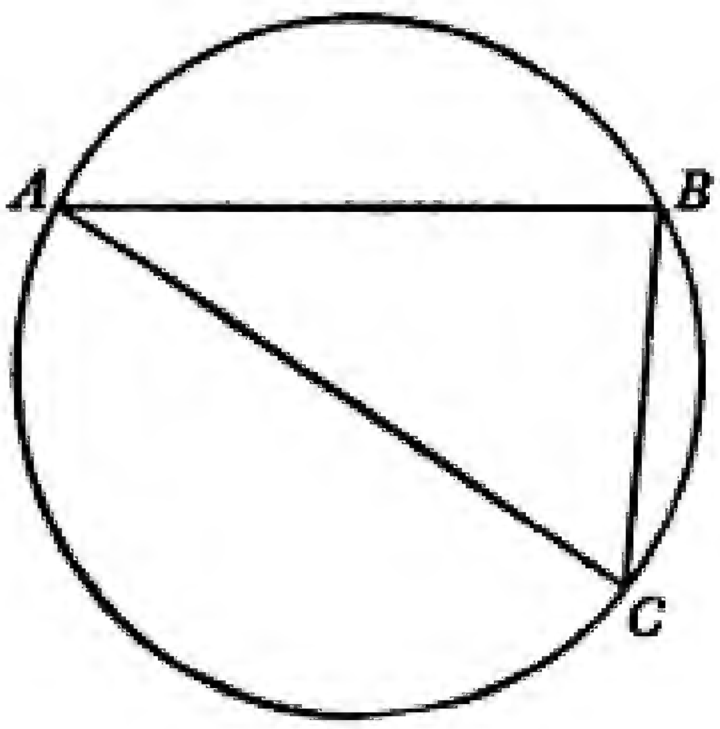
Arcos °	'	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	'	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
66	30	91706	116	72	30	95372	87
66	40	91822	115	72	40	95459	86
66	50	91936	114	72	50	95545	85
67	0	92050	113	73	0	95630	
67	10	92164		73	10	95715	84
67	20	92276	112	73	20	95799	83
67	30	92388	111	73	30	95882	82
67	40	92449	110	73	40	95964	81
67	50	92609	109	73	50	96045	
68	0	92718		74	0	96126	80
68	10	92827	108	74	10	96206	79
68	20	92935	107	74	20	96285	78
68	30	93042	106	74	30	96363	77
68	40	93148	105	74	40	96440	
68	50	93253		74	50	96517	76
69	0	93358	104	75	0	96592	75
69	10	93462	103	75	10	96667	74
69	20	93565	102	75	20	96742	73
69	30	93667		75	30	96815	72
69	40	93769	101	75	40	96887	
69	50	93870	100	75	50	96959	71
70	0	93969	99	76	0	97030	70
70	10	94068	98	76	10	97099	69
70	20	94167		76	20	97169	68
70	30	94264	97	76	30	97237	
70	40	94361	96	76	40	97304	67
70	50	94457	95	76	50	97371	66
71	0	94552	94	77	0	97432	65
71	10	94646	93	77	10	97507	64
71	20	94739		77	20	97566	63
71	30	94832	92	77	30	97630	
71	40	94924	91	77	40	97692	62
71	50	95015	90	77	50	97754	61
72	0	95105		78	0	97815	60
72	10	95195	89	78	10	97875	59
72	20	95284	88	78	20	97934	58

(continuación)

Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado	Arcos °	Arcos '	Mitades de cuerdas a arcos dobles	Unidades por cada grado
78	30	97992		84	20	99511	28
78	40	98050	57	84	30	99539	27
78	50	98107	56	84	40	99567	
79	0	98163	55	84	50	99594	26
79	10	98218	54	85	0	99620	25
79	20	98272		85	10	99644	24
79	30	98325	53	85	20	99668	23
79	40	98378	52	85	30	99692	22
79	50	98430	51	85	40	99714	
80	0	98481	50	85	50	99736	21
80	10	98531	49	86	0	99756	20
80	20	98580		86	10	99776	19
80	30	98629	48	86	20	99795	18
80	40	98676	47	86	30	99813	
80	50	98723	46	86	40	99830	17
81	0	98769	45	86	50	99847	16
81	10	98814	44	87	0	99863	15
81	20	98858	43	87	10	99878	14
81	30	98902	42	87	20	99892	13
81	40	98944		87	30	99905	12
81	50	98986	41	87	40	99917	
82	0	99027	40	87	50	99928	11
82	10	99067	39	88	0	99939	10
82	20	99106	38	88	10	99949	9
82	30	99144		88	20	99958	8
82	40	99182	37	88	30	99966	7
82	50	99219	36	88	40	99973	6
83	0	99255	35	88	50	99979	
83	10	99290	34	89	0	99985	5
83	20	99324	33	89	10	99989	4
83	30	99357		89	20	99993	3
83	40	99389	32	89	30	99996	2
83	50	99421	31	89	40	99998	1
84	0	99452	30	89	50	99999	0
84	10	99482	29	90	0	100000	0

13. SOBRE LOS LADOS Y ÁNGULOS DE LOS TRIÁNGULOS PLANOS RECTILÍNEOS

I



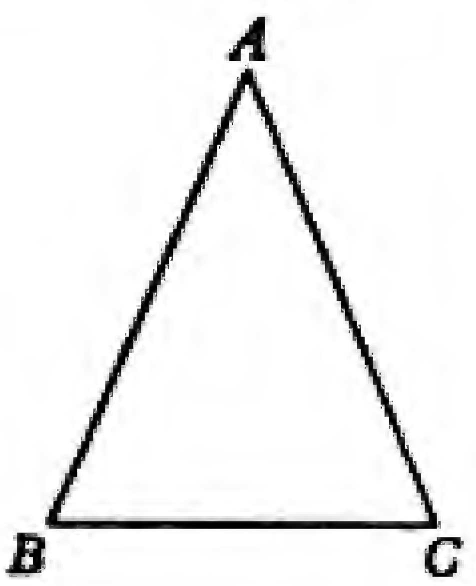
En un triángulo, conocidos los ángulos se conocen los lados.

Afirmo que sea el triángulo ABC, al que se le circunscribe un círculo de acuerdo con la quinta proposición del cuarto libro de Euclides. En consecuencia, también se conocerán los arcos AB, BC, CA, en los mismos grados que CCCLX son igual a dos rectos. Pero dados los arcos, se dan también los lados del triángulo inscrito en el círculo, como cuerdas, según la tabla expuesta, en las mismas unidades que el diámetro tomado tiene $\overline{\text{cc}}$ [200.000].

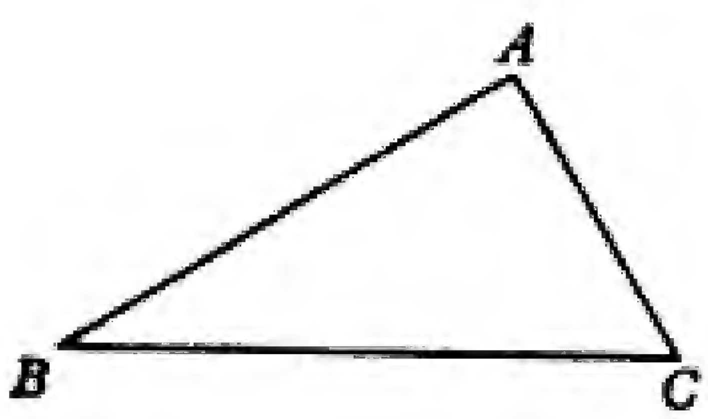
II

Pero si fueran dados dos lados del triángulo con alguno de los ángulos, se conocerán también el otro lado junto con los demás ángulos.

Pues, o bien los lados son iguales; y si son desiguales, el ángulo dado o es recto o es agudo u obtuso; y a la vez los lados dados pueden comprender o no comprender el ángulo dado.



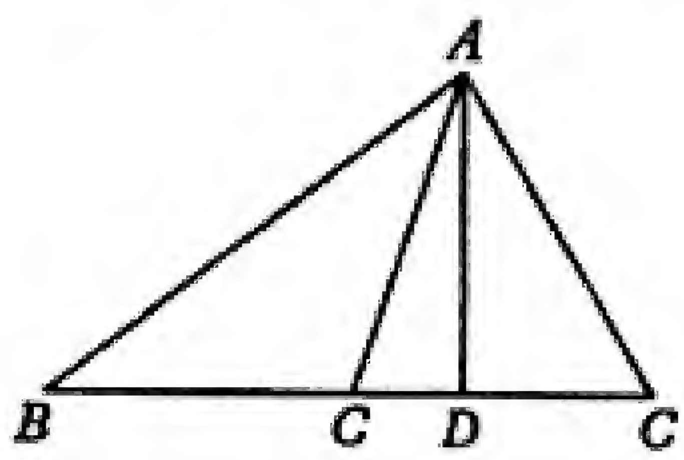
En primer lugar, en el triángulo ABC, sean los dos lados conocidos AB y AC iguales, que comprenden al ángulo dado A. En consecuencia, los otros ángulos, los de la base BC, como son iguales, se conocen también como la mitad del resto, después de substraer A de dos ángulos rectos. Pero si el ángulo dado en principio hubiera estado en la base, se conocería inmediatamente su compañero y el otro será el resultado de restarle éstos a dos rectos. Pero en un triángulo de ángulos conocidos, se conocen los lados; por la tabla se conoce la propia base BC en unidades, de las cuales AB o AC, como si fueran líneas trazadas desde el centro [radios], serían de $\overline{\text{c}}$ [unidades], o un diámetro de $\overline{\text{cc}}$ [200.000] unidades.



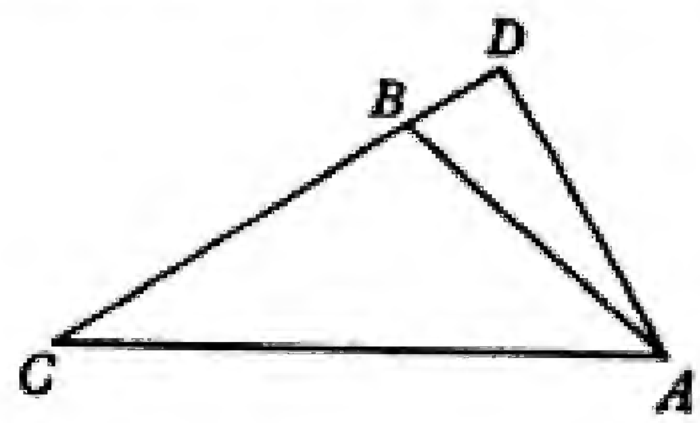
Si el ángulo BAC, comprendido por lados conocidos, fuera recto, resultará lo mismo. Pues es clarísimo que lo que suman los cuadrados de AB y AC es igual al cuadrado de la base BC; se conoce, por tanto, BC en longitud y los otros lados en su relación mutua. Pero el segmento de círculo que cubre un triángulo ortogonal es un semicírculo, cuya base BC sería el diámetro. En consecuencia, BC será de $\overline{\text{cc}}$ [200.000] unidades, se darán AB y AC como subtensas a los restantes ángulos B, C. Por ello la relación de la tabla los mostrará en unidades, de las cuales CLXXX son iguales a dos rectos.

Lo mismo resultará si se hubiera dado BC con otro de los lados que comprenden el ángulo recto: lo que pienso que consta ya muy claramente.

Sea ahora conocido el ángulo agudo ABC, comprendido por los lados también conocidos AB y BC, y desde el punto A descienda una perpendicular a BC, prolongando ésta, si fuera necesario, según caiga dentro o fuera del triángulo. Esta perpendicular sea AD, por la que se distinguen dos triángulos ortogonales ABD y ADC. Y puesto que en el triángulo ABD se dan los ángulos, pues D es recto y B es dado por hipótesis, luego se dan también AD y BD por la tabla, como subtensas a los ángulos A y B, en unidades de las que AB, el diámetro del círculo, tiene $\overline{\mathrm{cc}}$ [200.000]. Y por la misma razón por la que se conocía AB en longitud, se conocerán igualmente AD y BD. Y también se da CD, en la que BC y BD se diferencian. En consecuencia, también en el triángulo rectángulo ADC, dados los lados AD y CD, se conoce el lado buscado AC y el ángulo ACD según la precedente demostración.



Y no sucederá de otro modo si el ángulo B fuera obtuso, puesto que desde el punto A trazada la perpendicular AD a la línea recta prolongada BC, se produce el triángulo ABD de ángulos dados. Pues el ángulo ABD, exterior al ABC, es conocido, y el D es recto, luego se conoce BD y AD, en las unidades de las que AB tiene $\overline{\mathrm{cc}}$. Y puesto que BA y BC están entre sí en proporción conocida, se conoce también AB, en las mismas unidades en las que se mide BD y CBD completa. Por tanto, también en el triángulo rectángulo ADC, siendo dados dos lados, el AD y el CD, se conoce también el buscado AC y el ángulo BAC, junto con el que queda ACB: que es lo que se buscaba.



Sea, ahora, uno u otro de los lados dados el que subtiende al ángulo conocido B, esto es, puede ser AC, junto con AB. Luego, se conoce por la tabla el AC, en unidades de las que el diámetro del círculo que circunscribe al triángulo ABC tiene $\overline{\mathrm{cc}}$ [200.000], y por la razón dada entre AC y AB, se conoce en unidades similares AB y por la tabla el ángulo ACB junto con el otro ángulo BAC, por el que se conoce también la subtensa CB: y con esta razón dada se conoce la longitud de los lados en cualquier magnitud.

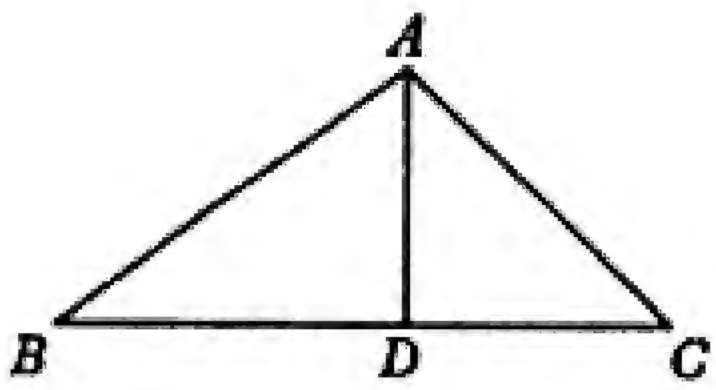
III

Dados todos los lados de un triángulo, se conocen los ángulos.

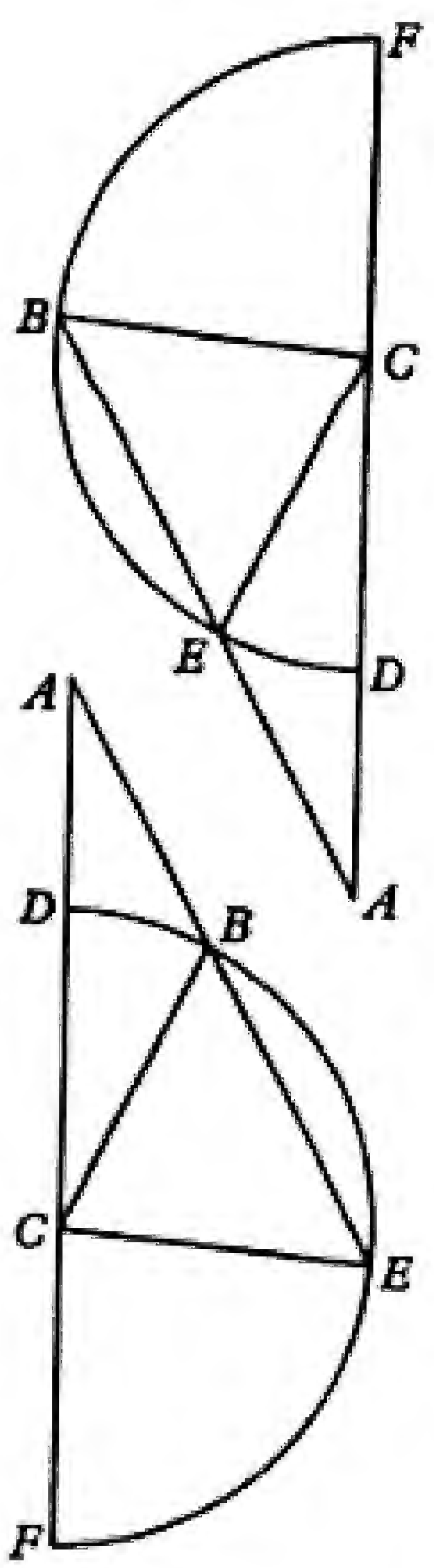
Es suficientemente conocido como para indicarlo que en un triángulo equilátero cada uno de los ángulos mide la tercera parte de dos rectos.

En el isósceles también está claro. Pues los lados iguales son al tercero como la mitad del diámetro a la subtensa del arco, por lo cual se conoce el ángulo comprendido por los lados iguales de acuerdo con la tabla, en aquellos grados en los que alrededor del centro CCCLX valen cuatro rectos; después, los otros ángulos, que están en la base, también se conocen, como la mitad de lo que queda de dos rectos [la mitad del suplementario].

Luego, queda ahora que se demuestre esto en los triángulos escalenos, que de modo semejante dividiremos en ortogonales. Sea ABC el triángulo escaleno de lados conocidos, y al lado que sea más largo, por ejemplo el BC, bájese la perpendicular AD. Y nos enseña la proposición XIII del libro II de Euclides, que AB, subtensa de un ángulo agudo, al cuadrado, se resta de la suma de los otros dos lados al cuadrado y resulta el doble del rectángulo BC, CD. Pues es necesario que el ángulo C sea agudo, de otra manera sucedería también, contra la hipótesis, que AB sería el lado más largo, lo que conviene señalar a partir del libro I de Euclides, proposición XVII y las dos siguientes. Luego, se dan BD y DC, y los triángulos ABD y ADC serán ortogonales, de lados y ángulos conocidos, como ya se ha repetido varias veces, a partir de los cuales constan los ángulos buscados del triángulo ABC.



De otro modo. Igualmente, la penúltima proposición del libro III de Euclides, nos mostrará quizá un método más cómodo, si por el lado más pequeño, que sea el BC, con centro en C y con un intervalo [radio] BC, describimos un círculo que cortará a los dos lados restantes o a uno de ellos. Corte ahora a los dos, a AB en el punto E y AC en el D, y extiéndase también la línea ADC hasta el punto F para completar el diámetro DCF.



Estructurado esto así, es claro por aquel precepto de Euclides, que el rectángulo FA, AD, es igual al que hay en BA, AE, siendo uno y otro igual al cuadrado de la línea que desde A toca [tangente] al círculo. Pero se conoce AF completa, al ser conocidos todos sus segmentos, o sea, CF, CD, iguales a BC, que son la distancia del centro a la circunferencia [radios], y AD, longitud en la que CA excede a CD [AD = CA - CD]. Por lo cual, como es conocido el rectángulo BA, AE y la recta AE en longitud, junto con el resto BE, que subtiende al arco BE. Uniendo EC tendremos el triángulo BCE de lados conocidos: luego se da también el ángulo EBC. De ahí que, por lo precedente, se conozcan también los restantes ángulos C y A, en el triángulo ABC.

Por otra parte, que el círculo no corte a AB, como en la siguiente figura, donde AB cae sobre la circunferencia cóncava: no menos será dada BE y, en el triángulo isósceles BCE, el ángulo CBE será dado y el exterior ABC. Y con el mismo argumento de demostración de antes se conocen los otros ángulos.

Y lo dicho sobre los triángulos rectilíneos, en los que se basa la mayor parte de la geodesia, es suficiente. Pasemos ahora a los esféricos.

14. SOBRE LOS TRIÁNGULOS ESFÉRICOS

Llamamos aquí triángulo convexo [esférico], aquel que en una superficie esférica está contenido por tres arcos de círculos máximos. Pero tomemos la diferencia y magnitud

de los ángulos en un arco de círculo máximo, que es descrito con el punto de sección como polo, y este arco es interceptado por los cuadrantes de los círculos que comprenden el ángulo. Tal arco así interceptado es a toda la circunferencia, como el ángulo de la sección es a IIII rectos, los que dijimos que contenían CCCLX grados iguales.

I

Si hubiera tres arcos de círculos máximos de una esfera, de los que dos cualquiera, juntos, fueran mayores que el tercero, es evidente que con ellos puede construirse un triángulo esférico.

Pues lo que aquí se propone con respecto a los arcos lo demuestra la proposición XXIII del libro XI de Euclides respecto a los ángulos. Existiendo la misma razón entre ángulos y arcos y pasando los círculos máximos por el centro de la esfera, es patente que, aquellos tres sectores de los círculos a los que pertenecen los arcos, constituyen un ángulo sólido en el centro de la esfera. Luego, está claro lo que se propone.

II

Es necesario que cualquiera de los arcos del triángulo [esférico] sea menor que un semicírculo.

Pues el semicírculo no forma ningún ángulo en el centro, sino que descansa en una línea recta. Pero los otros dos ángulos, a los cuales pertenecen los arcos, no pueden cerrar un ángulo sólido en el centro y de ahí tampoco un triángulo esférico. Y pienso que ésta fue la causa por la que Ptolomeo, en la explicación de este tipo de triángulos, sobre todo con respecto a la figura del sector esférico, declara que no existen arcos considerados mayores que un semicírculo.

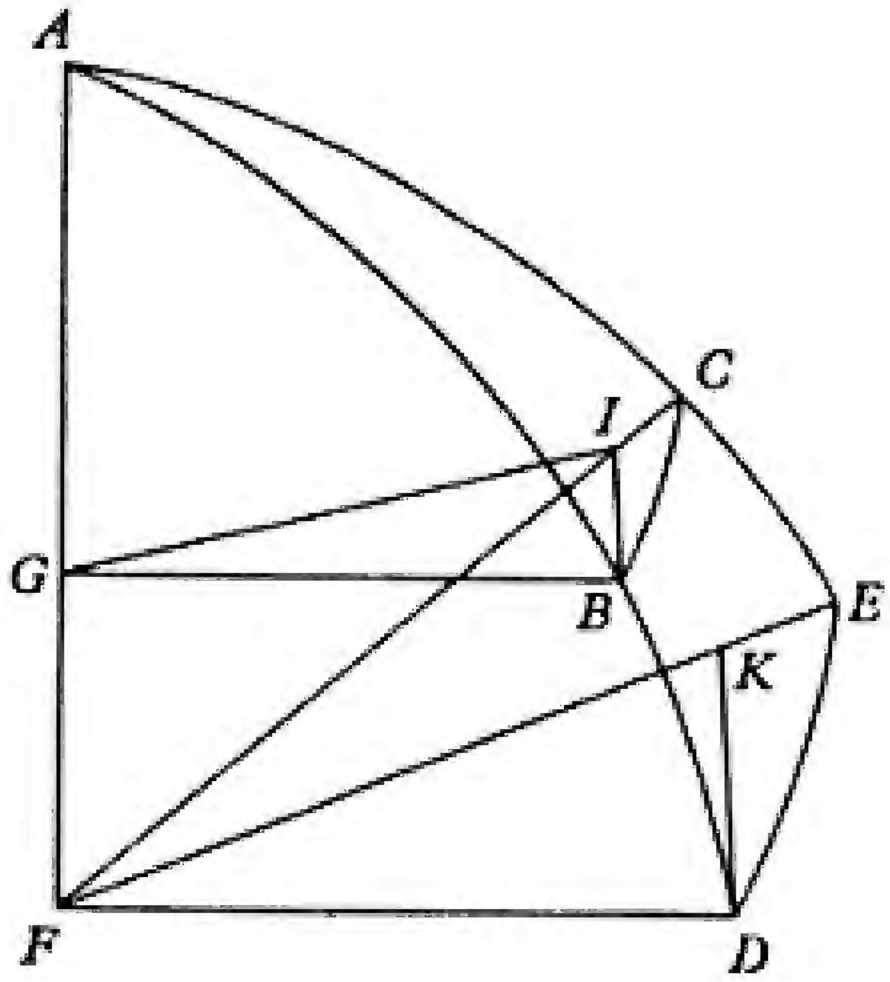
III

En los triángulos esféricos que tienen un ángulo recto, la línea recta [cuerda] que subtiende al doble del lado que se opone al ángulo recto, es a la subtensa [cuerda] de uno de los lados que comprenden el ángulo recto, como el diámetro de la esfera a la [cuerda] que subtiende el doble del ángulo comprendido en el círculo máximo de la esfera por el lado restante y el primero [hipotenusa].

Sea, pues, el triángulo esférico ABC, cuyo ángulo C sea recto. Digo que la subtensa al doble de AB es a la subtensa del doble de BC como el diámetro de la esfera es a la línea que subtiende en el círculo máximo al doble del ángulo BAC.

Tomando A como polo, descríbase DE arco de un círculo máximo, y complétense los cuadrantes de los círculos ABD y ACE. Y desde el centro de la esfera F, señálense las secciones comunes de los círculos: FA la de ABD y ACE, FE la de ACE y DE, y FD de ABD y DE. Y además FC de los círculos AC y BC. Después trácense formando ángulos rectos [perpendiculares] BG a FA, BI a FC y DK a FE, y únase GI.

En consecuencia, puesto que si un círculo corta a otro círculo trazado a través de sus polos, lo corta en ángulos rectos, será recto el ángulo comprendido por AED, y también



el ABC por hipótesis, y cada uno de los planos EDF y BCF perpendicular al AEF. Por lo cual, si desde el punto K en el segmento común FKE se levantara una línea recta perpendicular en el plano subyacente, comprenderá también, junto con KD, un ángulo recto, por la definición de los planos perpendiculares entre sí; también KD es perpendicular a AEF. Pero, mediante idénticas relaciones, se levanta BI con respecto al mismo plano, y por ello DK y BI son paralelas entre sí. Pero también lo es GB a FD, porque FGB y GFD son ángulos rectos. Y por la proposición X del libro XI de los *Elementos* de Euclides, el ángulo FDK será igual al GBI. Pero el FKD es recto y también el GIB, por definición de la línea perpendicular. En consecuencia, los lados de los triángulos semejantes son proporcionales, de modo que DF es a BG como DK es a BI. Pero BI es la mitad de la línea que subtiende [cuerda] al doble del arco CB, ya que forma un ángulo recto con la línea que parte del centro [radio] CF. Y por la misma razón, BG, mitad de la línea que subtiende al doble del lado BA, y DK mitad de la que subtiende al doble de DE, o sea, el ángulo del doble de A, y DF es la mitad del diámetro de la esfera.

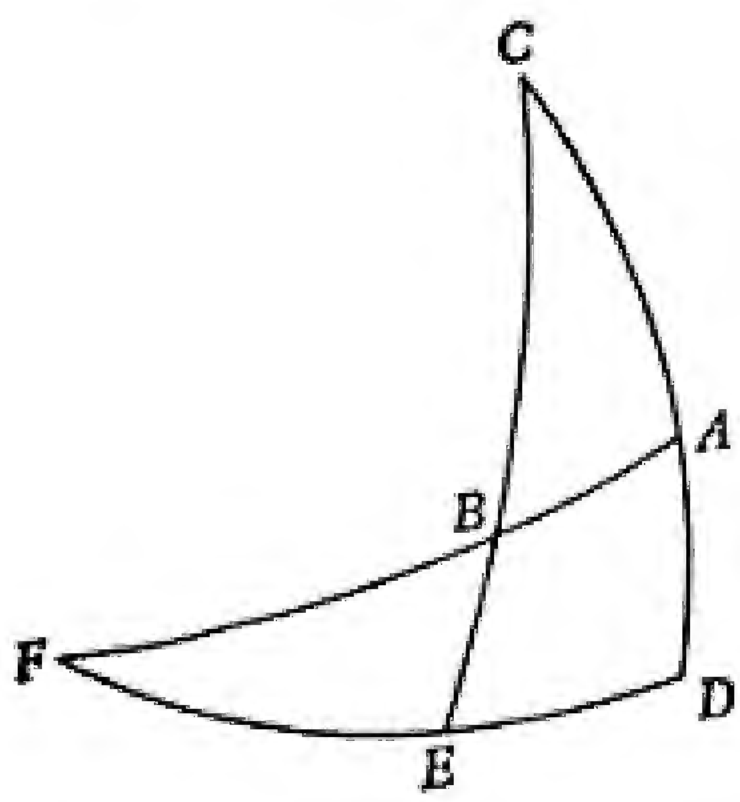
En consecuencia, es patente que la subtensa del doble de AB es a la subtensa del doble de BC, como el diámetro es a la línea que subtiende al doble del ángulo A, o sea, al doble del arco interceptado DE: lo cual se debía demostrar.

IV

En cualquier triángulo que tenga un ángulo recto, conociéndose además otro ángulo junto con cualquier lado, se puede conocer el restante ángulo y los demás lados.

Sea, pues, el triángulo ABC, que tiene el ángulo A recto y otro cualquiera, por ejemplo el B, dado. Respecto al lado dado suponemos una triple posibilidad: que sea adyacente a los ángulos dados, como AB, o sólo al recto, como AC, o que se oponga al recto, como BC.

En primer lugar, sea el lado dado AB y tomando a C como polo descríbase el arco del círculo máximo DE y, completados los cuadrantes CAD y CBE, prolónguese AB y DE hasta que se corten en el punto F. Luego, a la vez, estará en F el polo de CAD, porque A y D son ángulos rectos. Y puesto que, si en una esfera las órbitas máximas se cortan entre sí en ángulos rectos, recíprocamente se cortan en dos y recíprocamente se cortan por los polos, luego también serán ABF y DEF cuadrantes de los círculos. Siendo conocido AB, se conoce también BF, la parte restante del cuadrante, y el ángulo EBF es igual al conocido ABC, por opuesto por el vértice. Pero, por la demostración precedente, la subtensa del doble de BF



es a la subtensa del doble de EF, como el diámetro de la esfera es a la subtensa del doble del ángulo EBF. Pero tres de ellas se conocen: el diámetro de la esfera, la [cuerda] del doble de BF y del doble del ángulo EBF, o sus mitades. Luego, se da por la proposición XV del libro VI de Euclides, también la mitad de la línea que subtiende al doble de EF, y por la tabla el arco EF y el resto DE del cuadrante, o el ángulo buscado C. Del mismo modo, pero al contrario, la subtensa del doble de DE es a la del doble de AB, como la del doble de EBC es a la del doble de CB. Pero tres ya se conocen, DE, AB y CBE como cuadrante del círculo: luego se da también la cuarta, que subtiende al doble de CB, y el propio lado buscado CB. Y puesto que la subtensa del doble de CB es a la del doble de CA, como la del doble de BF es a la del doble de EF, puesto que están en la misma razón que el diámetro de la esfera a la subtensa al doble del ángulo CBA, y dos razones iguales a una son iguales entre sí: en consecuencia, dadas ahora tres BF, EF y CB, se da la cuarta CA y el tercer lado CA del triángulo ABC.

Sea ahora AC el lado considerado entre los datos, y nuestro propósito es encontrar los lados AB y BC, junto con el ángulo restante C. De nuevo, si se invierte el argumento se tendrá que la subtensa del doble de CA es a la subtensa del doble de CB en la misma proporción que la subtensa del doble del ángulo ABC es al diámetro, con lo que se conoce el lado CB; también AD y BE como la diferencia de los cuadrantes. Así de nuevo tendremos que la subtensa del doble de AD es a la subtensa del doble de BE como la subtensa del doble de ABF, que es el diámetro, es a la subtensa del doble de BF. Por tanto, se conoce el arco BF y la diferencia es el lado AB. Con un razonamiento similar a los precedentes, por medio de las subtensas del doble de BC, AB y FBE, se conoce la subtensa del doble de DE, o sea, el ángulo C restante.

De nuevo, supuesto el lado BC, se conocerá otra vez como antes AC y las restantes AD y BE. A partir de ellas, por medio de las líneas rectas subtendidas y el diámetro, como se ha dicho muchas veces, se conoce el arco BF y el lado restante AB. Entonces, por el teorema precedente, por medio de los conocidos BC, AB y CBE, se obtiene el arco ED, esto es, el otro ángulo C. El que buscábamos.

Y así, una vez más, en el triángulo ABC dados los ángulos A y B, de los cuales el A es recto, junto con alguno de los tres lados, se conoce el tercer ángulo con los otros dos lados. Lo que se quería demostrar.

V

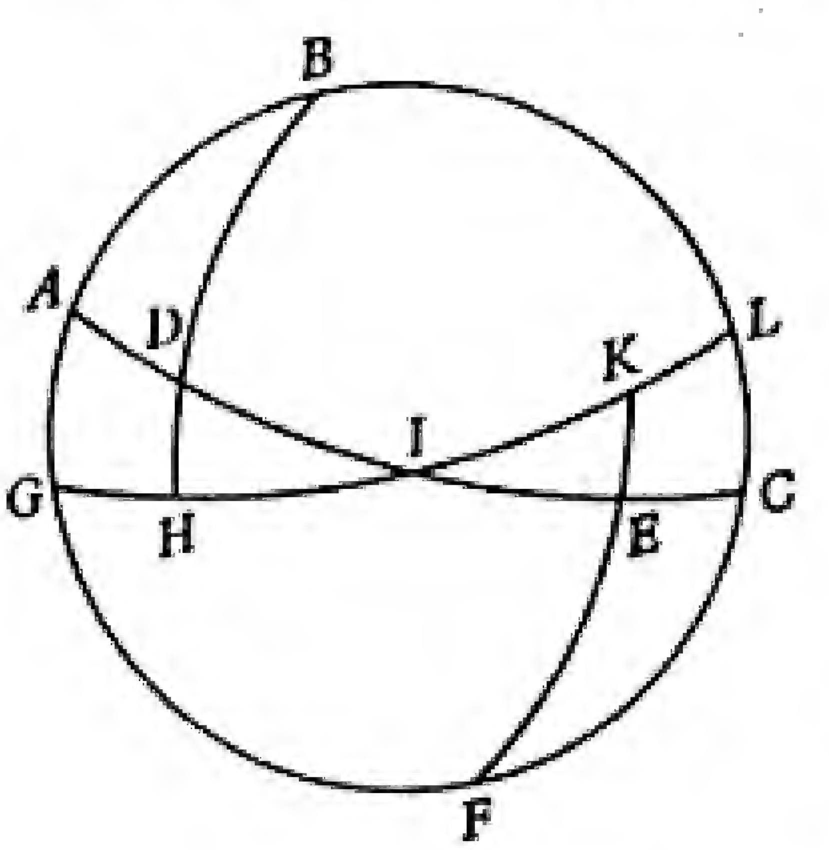
Dados los ángulos de un triángulo, uno de los cuales sea recto, se conocen los lados.

Manteniendo aún la figura precedente, donde por medio del ángulo conocido C, se conoce el arco DE, y el EF resto del cuadrante del círculo. Y puesto que BEF es un ángulo recto, porque BE desciende del polo de DEF, y el ángulo EBF es opuesto por el vértice a un ángulo conocido; en consecuencia, teniendo el triángulo BEF un ángulo E recto y además el ángulo B dado, junto con el lado EF, es un triángulo de lados y ángulos conocidos por el teorema precedente. Luego se da BF y el resto del cuadrante AB: y también en el triángulo ABC se demuestra que se conocen los restantes lados AC y BC por lo precedente.

VI

Si en la misma esfera, dos triángulos tuvieran un ángulo recto y además otro ángulo igual a otro del otro triángulo, y un lado de uno igual a otro lado, ya sea el adyacente a los ángulos iguales, ya sea el que se opone a cada uno de los ángulos iguales, se tendrán también los restantes lados de uno iguales a los restantes lados del otro, y el restante ángulo igual al ángulo restante.

Sea el hemisferio ABC, en el que se toman dos triángulos ABD y CEF, cuyos ángulos A y C son rectos, y además el ángulo ADB es igual al CEF, y un lado igual a un lado. Primeramente, este lado es adyacente a los ángulos iguales (esto es, AD igual a CE). Afirmo que también el lado AB es igual al lado CF, y BD al EF, y el ángulo restante ABD al restante CFE.



Pues tomados los polos en B y F, trácense los cuadrantes de círculos máximos GHI e IKL, y complétense ADI y CEI, los cuales es necesario que se corten entre sí en el polo del hemisferio, que está en el punto I, porque los ángulos en A y C son rectos, y porque GHI y CEI son círculos descritos por los polos del propio ABC.

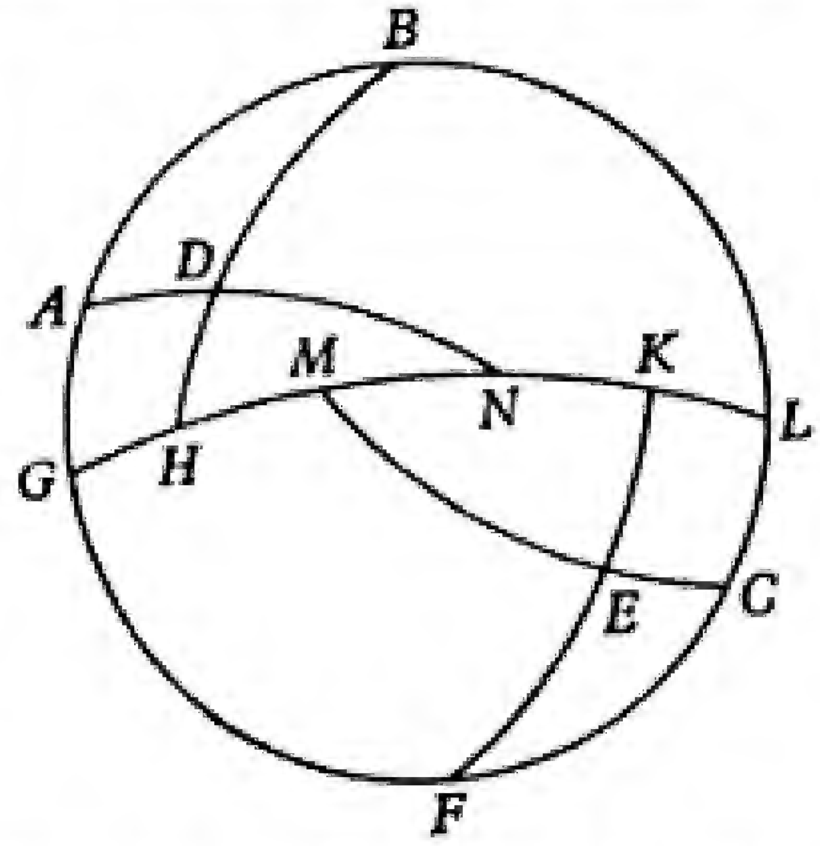
En consecuencia, puesto que AD y CE se suponen como lados iguales, serán también los arcos restantes DI e IE iguales, y los ángulos IDH e IEK, pues son opuestos por el vértice a los supuestos como iguales, y el H y el K son rectos. Y las cosas que están en la misma razón con respecto a una razón, entre sí están en la misma razón; será semejante la razón de la subtensa [cuerda] del doble de ID a la subtensa del doble de HI y la subtensa del doble de EI a la subtensa del doble de IK, siendo una y otra por el tercer teorema precedente, como el diámetro de la esfera es a la subtensa del doble del ángulo IDH, o igual a la subtensa del doble de IEK. Y por la XIIII proposición del libro V de los *Elementos* de Euclides, siendo la subtensa al doble del arco DI igual a la que subtiende al doble de IE, también serán iguales las subtensas del doble de IK y de HI. Y como en círculos iguales, líneas rectas iguales cortan arcos iguales, y del mismo modo las partes de los múltiplos están en la misma razón, serán iguales los arcos simples [planos] IH e IK y las partes restantes de los cuadrantes GH y KL, a partir de los cuales constan los ángulos B y F como iguales. Por esto también es la misma la razón entre la subtensa del doble de AD a la subtensa del doble de BD y la subtensa del doble de CE a la subtensa del doble de BD, que la subtensa del doble de EC a la subtensa al doble de EF. Y puesto que una y otra es como la subtensa al doble de HG, o su igual KL, es a la subtensa del doble de BDH, esto es, el diámetro, por el inverso del tercer teorema, también AD es igual a CE. Luego por la XIIII proposición del libro V de los *Elementos* de Euclides, BD es igual a EF, por las líneas rectas [cuerdas] subtendidas a los mismos arcos dobles.

Del mismo modo, para BD y EF iguales, demostraremos que los restantes lados y ángulos son iguales. Y a la vez, si AB y CF se toman como lados iguales, el mismo resultado se sigue por la identidad de las razones.

VII

También, aunque no hubiera ángulo recto, con tal de que el lado adyacente a los ángulos iguales fuera igual en ambos triángulos, se demostrará lo mismo.

De este modo, si en los dos triángulos ABD y CEF, los dos ángulos B y D fueran iguales a F y E del otro, también el lado BD, que es adyacente a ángulos iguales, será igual al lado EF. De nuevo afirmo que esos triángulos tienen iguales lados e iguales ángulos.



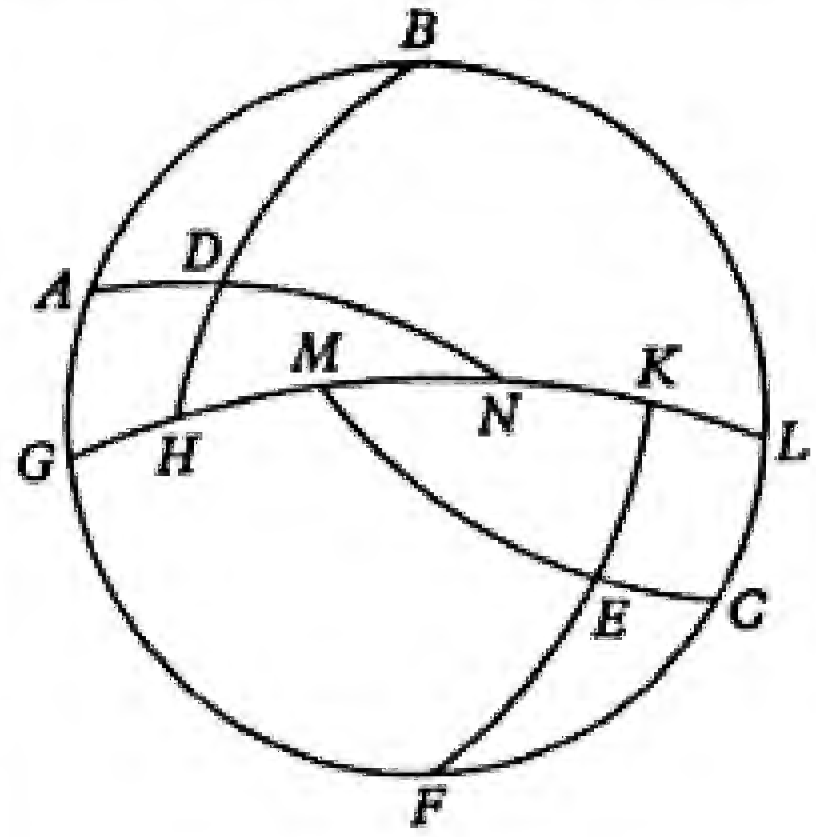
Pues tomados de nuevo los polos en B y F, descríbanse los arcos de círculos máximos GH y KL. Y prolongadas AD y GH córtense en N, y similarmente prolongadas EC y LK, en M. En consecuencia, puesto que los dos triángulos HDN y EKM tienen iguales los ángulos HDN y KEM, que son opuestos por el vértice a los tomados como iguales, y el H y el K son rectos, por ser secciones de arco descritas a través de los polos, también son iguales los lados DH y EK. Luego son equiángulos esos triángulos y equiláteros por la precedente demostración.

Y de nuevo, porque GH y KL son arcos iguales a causa de que B y F son ángulos supuestos iguales, luego toda GHN es igual a toda MKL, por el axioma de la suma de iguales. En consecuencia, aquí también son dos triángulos, AGN y MCL, que tienen un lado GN, igual a otro del otro, ML, y también un ángulo ANG igual a CML, y G y L rectos. Serán por ello también esos triángulos de lados y ángulos iguales. Por consiguiente, si se restan iguales de iguales, resultarán iguales AD a CE, AB a CF y el ángulo BAD al otro ángulo ECF. Que es lo que había que demostrar.

VIII

Pero también, si dos triángulos tuvieran dos lados de uno iguales a dos lados del otro, y un ángulo de uno igual a un ángulo de otro, ya sea el que comprenden los lados iguales, ya sea el que está en la base, también la base será igual a la base y los ángulos restantes a los ángulos restantes.

Como en la precedente figura, sea el lado AB igual al lado CF y el AD al CE, y, en primer lugar, el ángulo A, comprendido por los lados iguales, igual al ángulo C. Afirmo que también la base BD es igual a la base EF y el ángulo B al F, y el que queda BDA al restante CEF.



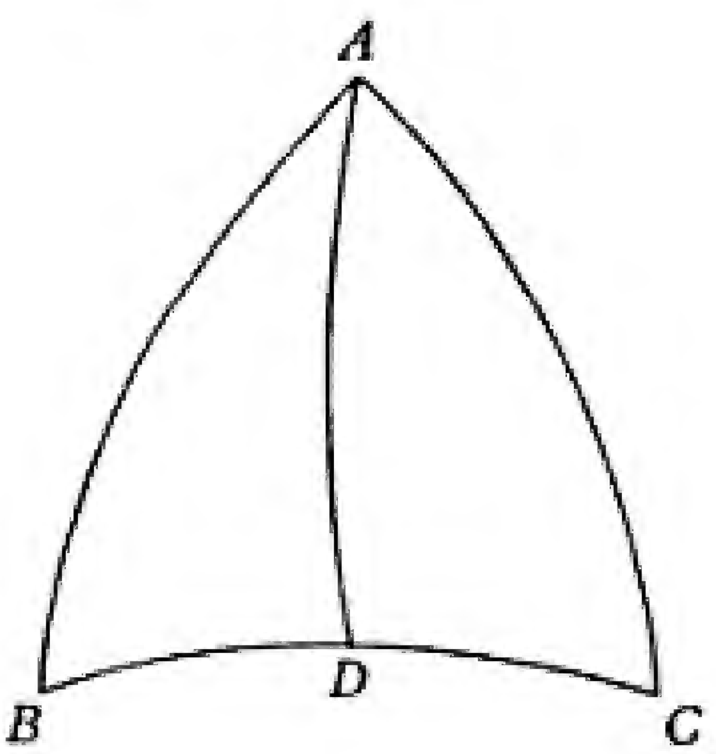
Tendremos, pues, dos triángulos AGN y CLM, cuyos ángulos G y L son rectos, y el GAN igual al MCL, que son lo que les falta [suplementarios] a los iguales BAD y ECF. En consecuencia, esos triángulos son entre sí equiángulos y equiláteros. Por lo cual, restándolos de los iguales AD y CE, queda como resto DN y ME también iguales. Pero ya se hizo patente que el ángulo DNH es igual al EMK, y que el H y el

K son rectos; también serán los dos triángulos DHN y EMK de iguales ángulos y lados entre sí, a partir de los cuales BD queda igual a EF y GH a KL, por lo que B y F son ángulos iguales y los restantes ADB y FEC iguales.

Si, en vez de los lados AD y EC, se toma como iguales las bases BD y EF, opuestas a ángulos iguales (permaneciendo lo demás), se demostrarán del mismo modo. Puesto que, por medio de los ángulos GAN y MCL exteriores iguales, y G, L rectos, y AG igual a CL, tendremos igualmente dos triángulos AGN y MCL, como antes, a su vez de lados y ángulos iguales entre sí. También, en cuanto partes de aquéllos, los [triángulos] DHN y MEK son iguales, porque H y K son ángulos rectos, y DNH, KME iguales, y los lados DH, EK, que son los restos de los cuadrantes, son iguales: de lo que se sigue lo mismo que dijimos.

IX

También en los triángulos isósceles esféricos, los ángulos que están en la base son iguales entre sí.



Sea el triángulo ABC, cuyos dos lados AB y AC sean iguales. Afirmo que también los ángulos que están junto a la base, el ABC y el ACB son iguales.

Desde el vértice A, descienda un círculo máximo, AD, que corte a la base formando ángulos rectos, esto es, trazado por los polos [de la base]. En consecuencia, en los dos triángulos ABD y ADC, el lado BA es igual al lado AC, y el AD común a ambos, y los ángulos en D rectos: es patente, por la demostración anterior, que los ángulos ABC y ACB son iguales. Que es lo que había que demostrar.

PORISMA

De aquí se sigue: el arco trazado por el vértice de un triángulo isósceles formando ángulos rectos en la base, cortará en dos a la base y al ángulo comprendido por los lados iguales, y viceversa: lo que consta por ésta y por la precedente demostración.

X

Dos triángulos cualesquiera, que tengan los lados de uno iguales a los lados del otro, tendrán también los ángulos iguales entre sí.

En efecto, puesto que, en cada triángulo, los tres segmentos de círculos máximos constituyen pirámides, que tienen las cúspides en el centro de la esfera, y como bases los triángulos planos, que están contenidos por las líneas rectas que subtienden [cuerdas] a los arcos de los triángulos convexos. Y aquellas pirámides son semejantes e iguales por la definición de figuras sólidas semejantes e iguales, y la razón de semejanza radica en que tienen los ángulos tomados en cualquier orden igual uno a otro de cada

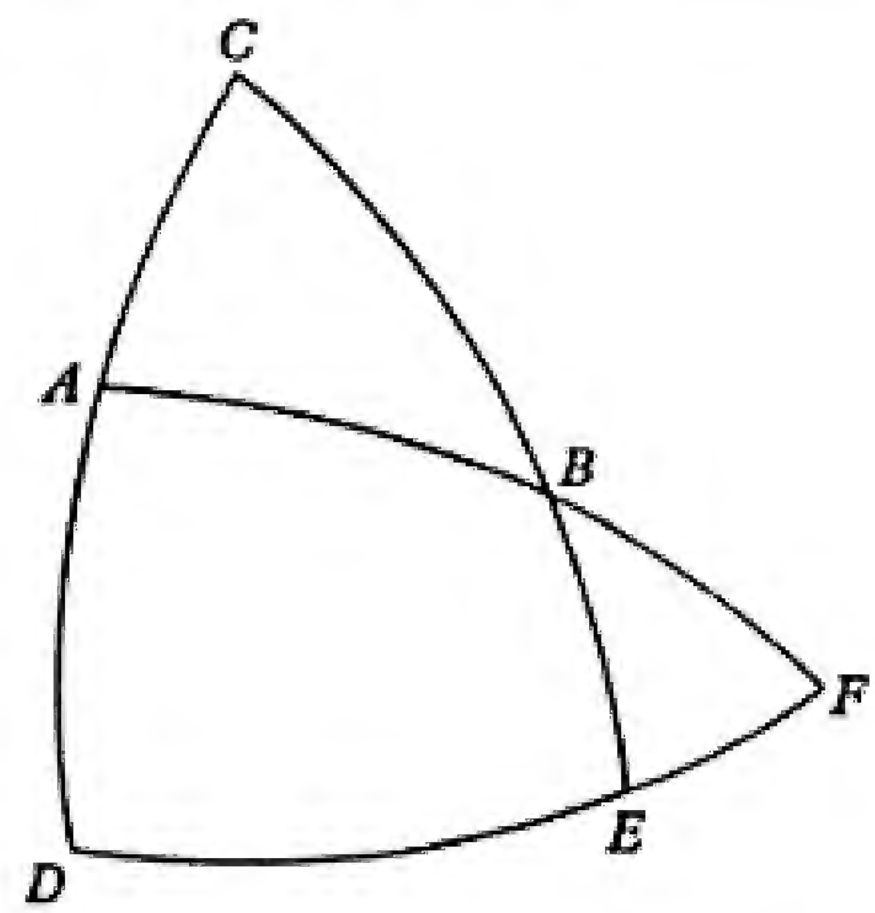
triángulo, luego tendrán esos triángulos los ángulos iguales entre sí. Y especialmente, los que definen más generalmente la similitud de figuras, quieren que ellas sean cualesquiera que tengan configuraciones semejantes, y a causa de las mismas configuraciones ángulos iguales entre una y otra. De lo cual juzgo que está claro que en una esfera, los triángulos que son equiláteros entre sí, son semejantes, del mismo modo que en los [triángulos] planos.

XI

Todo triángulo del que se conocen dos lados junto con un ángulo, se convierte en un triángulo de lados y ángulos conocidos.

Pues si los lados dados fueran iguales, serán iguales los ángulos que están en la base; y trazando un arco desde el vértice a la base, formando ángulos rectos [perpendicular], fácilmente se hará patente lo buscado por medio del corolario IX.

Pero si hubieran sido dados los lados desiguales, como en el triángulo ABC, cuyo ángulo A es dado junto con dos lados, los cuales pueden comprender el ángulo dado o no comprenderlo. Sean, pues, en primer lugar, los lados dados AB y AC los que comprenden el ángulo; y tomando a C como polo, descríbase el arco de círculo máximo DEF, y complétense los cuadrantes CAD y CBE, y prolongado AB, cortará a DE en el punto F. Así, también en el triángulo ADF se conoce el lado AD, lo que le falta [complementario] al cuadrante a partir del AC; y el ángulo BAD conocido por lo que le falta al CAB para valer dos rectos [suplementario] (pues la razón y la dimensión entre los ángulos es la misma que las que acontecen en la sección de líneas y planos rectos); y el ángulo D es recto. En consecuencia, por el IIII [teorema] de este capítulo, será el triángulo ADF de ángulos y lados conocidos. Y de nuevo, en el triángulo BEF se ha encontrado el ángulo F, y el E es recto por la sección a partir del polo, y también el lado BF, en el que todo ABF excede a AB. Luego, por el mismo teorema, también BEF será un triángulo de lados y ángulos dados. De ahí que partiendo de BE se conoce BC, resto del cuadrante, y a partir de EF se conoce el resto de DEF completo, que es DE, y es el ángulo C: y por medio del ángulo EBF, el ABC, que era el que se buscaba, por ser opuestos por el vértice.

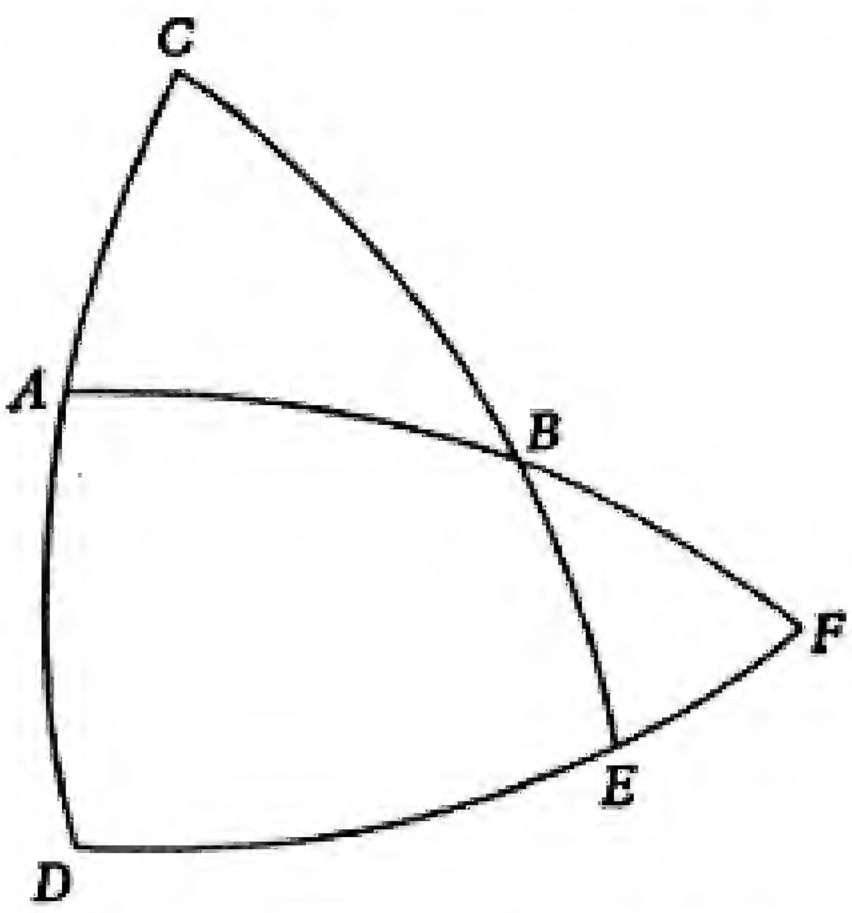


Si en lugar de AB se toma CB, que se opone al ángulo dado, sucederá lo mismo. Pues se dan los restos de los cuadrantes AD y BE, y, por la misma argumentación, dos triángulos ADF y BEF de ángulos y lados dados, como antes. Por lo cual, el triángulo propuesto ABC se convierte en de lados y ángulos dados: lo que se intentaba.

XII

Y además, si fueran dados dos ángulos cualquiera junto con un lado, sucederá lo mismo.

Permaneciendo la estructura de la figura anterior, se dan en el triángulo ABC dos ángulos, el ACB y el BAC, con el lado AC, que es adyacente a uno y otro ángulo. Además, si uno de los ángulos dados fuera recto, habría podido conseguirse todo lo demás, deduciéndolo según el cuarto teorema precedente. Pero queremos que éste sea distinto, que no sean rectos. En consecuencia, será AD el resto del cuadrante CAD [complementario], y el ángulo BAD lo que le falta al BAC para dos rectos [suplementario], y el D recto. En consecuencia, en el triángulo AFD, por el cuarto teorema de este capítulo, se conocen los ángulos con los lados. Pero, por el ángulo dado C se conoce el arco DE y el resto EF, y el BEF es recto, y el ángulo F es común a uno y otro triángulo. Se conocen, pues, por el cuarto teorema de este capítulo, BE y FB, por medio de los cuales constarán los otros lados AB y BC, los buscados.

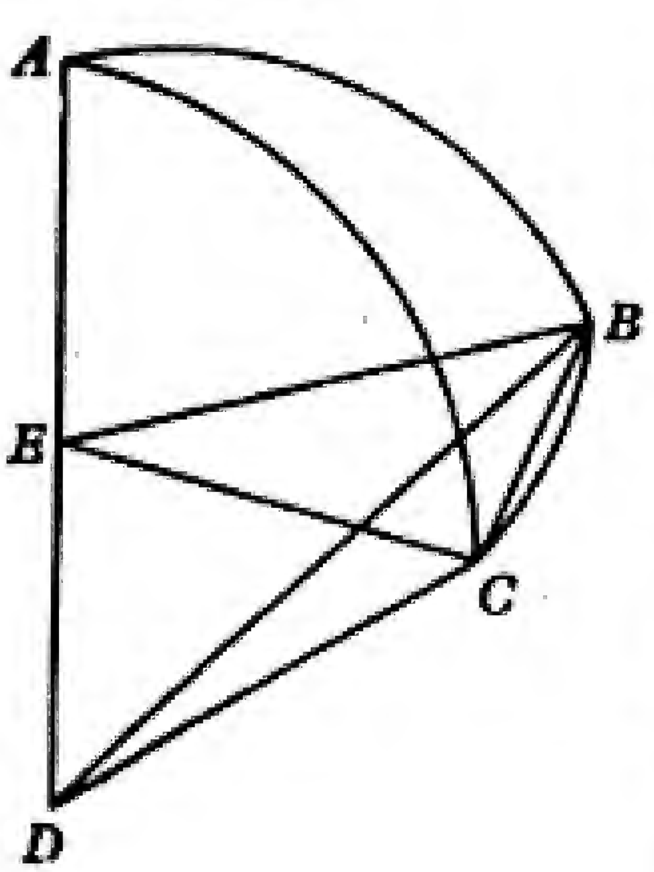


(Además, si uno de los ángulos dados fuera opuesto al lado conocido, por ejemplo, si se da el ángulo ABC en lugar del ACB, permaneciendo igual lo demás, también constará lo mismo por la anterior demostración, todo el triángulo ADF con los ángulos y lados dados, y, en particular, el triángulo semejante BEF, ya que, a causa del ángulo F común a uno y otro, y el EBF que es opuesto por el vértice al dado, y el E que es recto, se demuestra, como en los precedentes, que se conocen también todos sus lados; de lo que se deduce lo mismo que dijimos. Están, pues, todas estas cosas ligadas por un nexo siempre mutuo y perpetuo, como corresponde a la forma del globo.

XIII

Finalmente, dados todos los lados de un triángulo, se conocen sus ángulos.

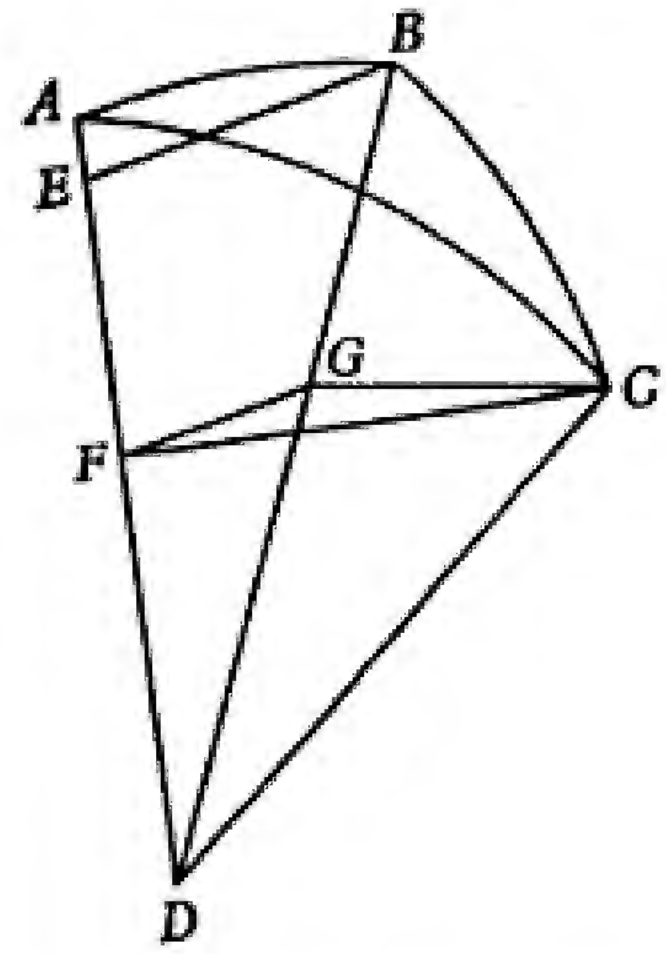
Sean dados los lados del triángulo ABC. Afirmo que también se encuentran todos los ángulos.



El triángulo puede tener lados iguales o no tenerlos. Sean, pues, en primer lugar, iguales AB y AC. Es claro que también serán iguales las mitades de las subtensas (cuerdas] al doble de ellos. Siendo éstas [las mitades de las cuerdas] BE y CE que, a causa de su igual distancia desde el centro de la esfera, se cortarán entre sí en el punto E, sobre DE, sección común de los círculos: lo que es patente por la IIII definición del libro III de Euclides y su conversa. Pero, por la III proposición del mismo libro, el ángulo DEB en el plano ABD es recto y del mismo modo el DEC en el plano ACD. En consecuencia, BEC es el ángulo de inclinación de los planos, por la definición IIII del libro XI de Euclides, al cual encontrare-

mos del siguiente modo. Pues, siendo una subtensa [cuerda] la línea recta BC, tendremos el triángulo rectilíneo BEC de lados conocidos, por estar dados sus arcos; también pasará a ser de ángulos conocidos y tendremos el ángulo BEC buscado, esto es, el esférico BAC, y los demás por lo precedente.

Si el triángulo fuera escaleno, como en la segunda figura, es claro que las mitades de las líneas rectas que están bajo sus arcos dobles no se tocan en absoluto. Puesto que, si el arco AC fuera mayor que el AB, siendo CF la mitad de la subtensa al doble del arco AC, caerá más abajo; pero si es menor, caerá más arriba, en cuanto acaece que tales líneas estén más cercanas o más alejadas del centro, por la proposición XV del libro III de Euclides. Entonces, hágase FG paralela a BE, que cortará a BD, sección común de los círculos, en el punto G, y únanse CG. En consecuencia, es claro que el ángulo EFG es recto, y lo mismo su igual AEB, y el EFC (siendo CF la mitad de la subtensa [cuerda] al doble de AC) también es recto. En consecuencia, CFG será el ángulo de la sección de los círculos AB, AC, que también encontraremos. Pues DF es a FG, como DE a EB, pues son semejantes los triángulos DFG y DEB. Pero la misma razón tiene también DG con respecto a DB, luego también se conocerá DG en las unidades de las que DC vale 100.000. Pero como el ángulo GDC es dado por el arco BC, luego, por el segundo teorema de los triángulos planos, se conoce también el lado GC en las mismas unidades que los restantes lados del triángulo plano GFC.

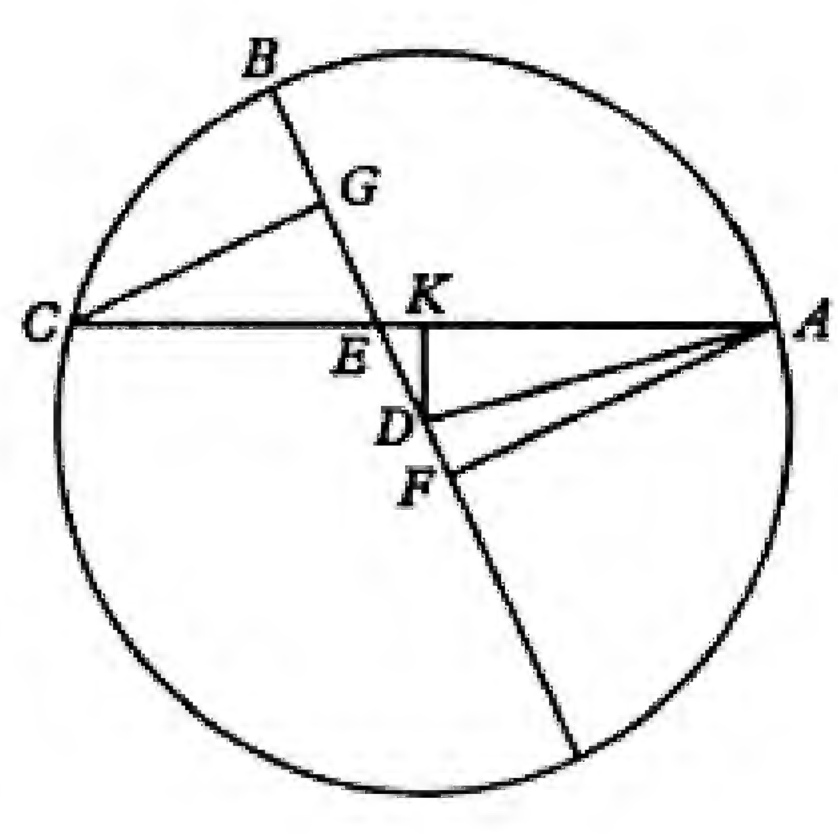


En consecuencia, por el último teorema de los triángulos planos, tendremos el ángulo GFC, esto es, el ángulo esférico BAC buscado, y de ahí obtendremos los demás por el undécimo teorema de los triángulos esféricos.

XIV

Si dado un arco de un círculo, se corta de tal manera que cada uno de los segmentos es menor que un semicírculo, y fuera dada la razón de la mitad de la subtensa [cuerda] al doble de un segmento con respecto a la mitad de la subtensa al doble del otro, se conocerán también los arcos de tales segmentos.

Dese, pues, el arco ABC alrededor del centro D, que se corta de tal modo en el punto B que sus segmentos sean menores que un semicírculo, y habiendo sido también dada de algún modo en longitud la razón de la mitad de la subtensa al doble de AB con respecto a la mitad de la subtensa al doble de BC. Y afirmo que los arcos AB y BC son dados.

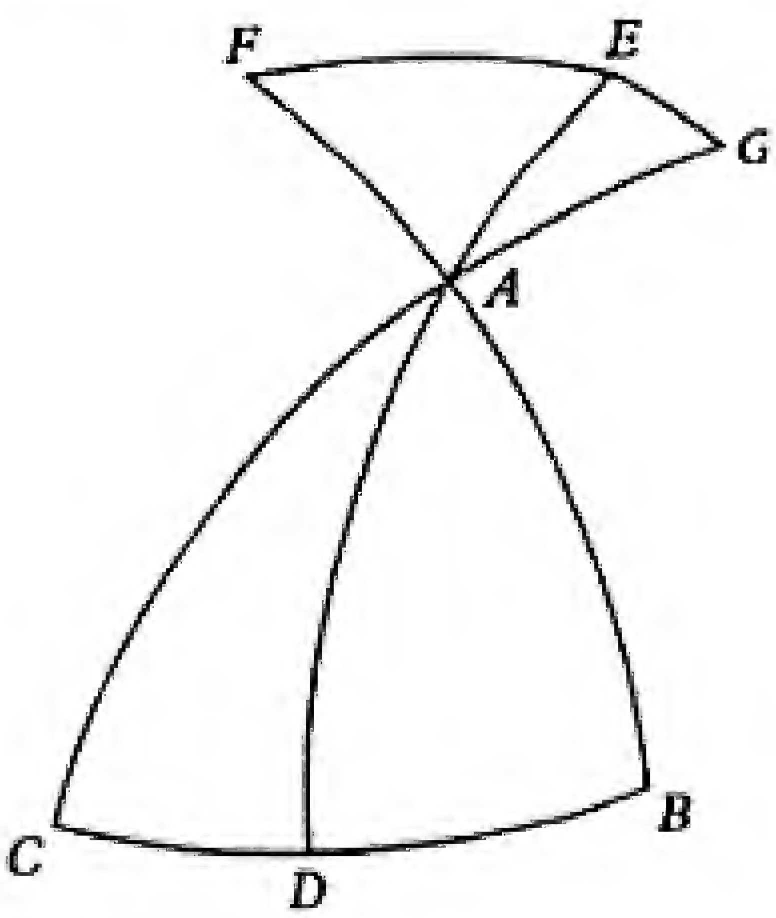


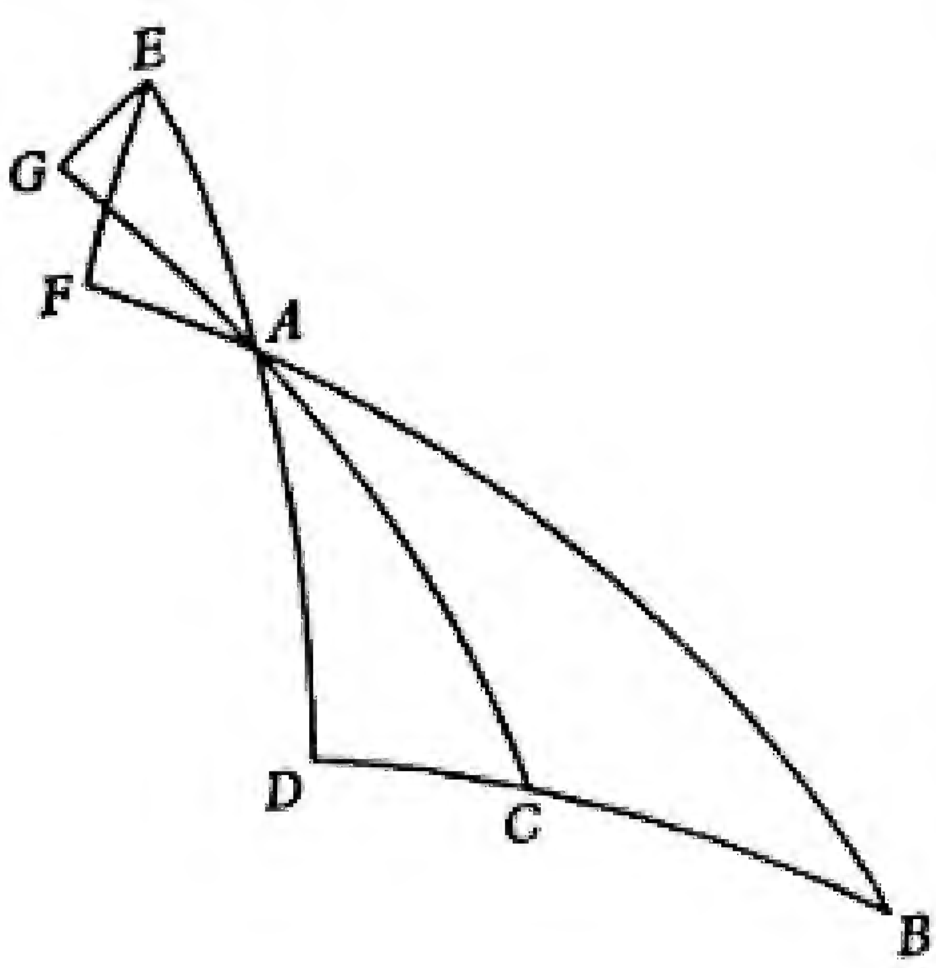
Subtiéndase, pues, la recta AC, que corte al diámetro en el punto E, y desde los extremos A, C, caigan perpendiculares a dicho diámetro, que sean AF y CG, las cuales tendrán que ser las mitades [de las cuerdas] al doble [de los arcos] AB y BC.

En consecuencia, en los triángulos rectángulos AEF y CEG los ángulos que tienen el vértice en E son iguales, y los mismos triángulos, por ser equiángulos y semejantes, tienen proporcionales los lados que se oponen a los ángulos iguales, como AF es a CG, así AE es EC. En consecuencia, habiendo sido dadas por estos cálculos AF o CG, por los mismos tendremos AE y EC; de donde se dará por los mismos cálculos toda la AEC. Pero se conoce la línea que subtiende al arco ABC, en las mismas unidades de la que parte del centro [radio] DEB, en las que también se conoce AK, la mitad de AC, y el resto EK. Únanse DA y DK, que también serán dadas en las mismas unidades que DB, como la mitad de la [cuerda] que subtiende al segmento restante [suplementario] de ABC en el semicírculo, comprendido bajo el ángulo DAK, y, en consecuencia, el ángulo ADK es dado, como comprendiendo la mitad del arco ABC. Pero dados también los lados del triángulo EDK y el ángulo recto EKD, se conocerá también EDK, y de ahí todo el ángulo EDA que comprende el arco AB, con lo que constará también el restante CB: de lo cual se esperaba la demostración.

XV

Dados todos los ángulos de un triángulo, sin ser ninguno recto, se conocen todos los lados.





Sea el triángulo ABC del que se conocen todos los ángulos, pero ninguno de ellos es recto. Afirmo que se dan también todos los lados.

En efecto, de uno de los ángulos, como A, descienda AD por los polos del arco BC, que cortará a BC formando ángulos rectos, y la misma AD caerá dentro del triángulo, a no ser que uno de los ángulos de la base, el B o el C, fuese obtuso y el otro agudo: si sucediera esto, habría que bajar el arco desde el propio ángulo obtuso hasta la base. En consecuencia, completados los cuadrantes BAF, CAG y DAE, y haciendo de polos B, C, trácense los arcos EF y EG. En consecuencia, serán rectos los ángulos F y G.

Por lo tanto, en los triángulos que tienen un ángulo recto, la proporción será: la mitad [de la cuerda] que subtiende a AE es a la mitad del doble de EF, como la mitad del diámetro de la esfera es a la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAF. Del mismo modo, en el triángulo AEG, que tiene en G un ángulo recto, la mitad de la que subtiende al doble de AE es a la mitad de la que subtiende al doble de EG, tendrá la misma razón que la mitad del diámetro de la esfera a la mitad de la que subtiende al doble de EAG. En consecuencia, por la misma razón, la mitad de la que subtiende al doble de

EF, estará en la misma razón con respecto a la mitad de la que subtiende al doble de EG, como la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAF con respecto a la mitad de la que subtiende al doble del ángulo EAG. Y puesto que los arcos FE y EG son dados, pues son el resto [complementarios] por el que los ángulos C y B difieren de un recto, luego a partir de ellos tendremos dada la razón entre los ángulos EAF y EAG, esto es, BAD es a CAD, que son opuestos por el vértice a aquéllos. Pero todo el ángulo BAC es dado; en consecuencia, por el precedente teorema se conocerán también los ángulos BAD y CAD. Y de ahí, por el quinto teorema, obtendremos los lados AB, BD, AC, CD y el BC completo.

Baste esto, que hemos tratado superficialmente, sobre los triángulos, necesario por lo demás para nuestra obra. Si hubiera que tratarlo más ampliamente, sería necesario un volumen especial para ello.

LIBRO SEGUNDO

Habiendo expuesto en síntesis los tres movimientos de la Tierra, por medio de los cuales prometimos demostrar todas las apariencias de los astros, haremos de nuevo esto mismo examinándolos por partes, uno a uno, e investigando según nuestras propias posibilidades. Empezaremos, pues, por el cambio más conocido de todos, el del tiempo diurno y nocturno, al cual dijimos que los griegos llamaban νυχθήμερον y que admitimos como apropiado al globo terrestre de manera total y directa, puesto que de él surgen los meses, los años y demás medidas del tiempo con numerosos nombres, como resultado de un cálculo a partir de la unidad. Diremos, pues, pocas cosas acerca de la desigualdad de los días y las noches, del nacimiento y la puesta del Sol, de las partes del zodíaco y de los signos, y de las consecuencias de este género de revolución. Sobre todo, porque muchos ya han escrito con suficiente profusión acerca de estos asuntos, respecto a los cuales tenemos la misma opinión y concordamos. Y no tiene importancia alguna el que si ellos lo demuestran por medio de la quietud de la Tierra y la rotación del universo, nosotros, partiendo de concepción opuesta, alcancemos el mismo fin, porque cosas recíprocas concuerdan inversamente entre sí. No omitiremos, sin embargo, nada que sea imprescindible.

Nadie se admire, pues, si hablamos del orto y ocaso del Sol y de las estrellas, y de otras cosas semejantes a éstas, sino sepa que nosotros hablamos con un lenguaje habitual, el cual puede ser comprendido por todos, teniendo siempre, sin embargo, en la mente que: «Para nosotros, transportados por la Tierra, transitan el Sol y la Luna, y vuelve el turno de las estrellas y de nuevo retroceden».

1. SOBRE LOS CÍRCULOS Y SUS NOMBRES

Llamamos círculo equinoccial al mayor de los paralelos del globo terráqueo, trazados alrededor de los polos de su revolución diaria, y círculo zodiacal al que pasa por el medio del círculo de los signos, bajo el que el centro de la Tierra se mueve en su revolución anual. Pero, puesto que el zodíaco es oblicuo al equinoccial, a causa de la inclinación del eje de la Tierra con respecto a aquél, durante la revolución diaria de la Tierra describe dos círculos tangentes entre sí a uno y otro lado, como límites extremos de su oblicuidad, círculos a los que se llama trópicos. Pues, en éstos, parece el Sol realizar giros, es decir, cambios, como el invernal y el estival. De ahí se acostumbró a llamar al

que está al norte trópico del solsticio de verano, y al otro, al que está al sur, brumal, según se expuso antes en la resumida descripción de los movimientos terrestres.

Después sigue el llamado horizonte, al que los latinos llamaron límite (pues nos separa la parte visible del mundo de la que nos está oculta), en el que parecen salir todos los astros que se ponen, que tiene su centro en la superficie de la Tierra y su polo junto a nuestro vértice. Pero puesto que la Tierra no se puede comparar con la inmensidad del cielo, y sobre todo porque ni siquiera la distancia entre el Sol y la Luna (según nuestra hipótesis) puede discernirse con respecto a la magnitud del cielo, el círculo horizonte parece cortar el cielo en dos partes como por el centro del mundo, según demostramos al principio. Pero, en cuanto el horizonte es oblicuo con respecto al círculo equinoccial, toca también a dos círculos paralelos a ambas partes de él, es decir, el que está al norte, el de las estrellas visibles, el que está al sur el de las ocultas, llamados por Proclo y los griegos, aquél ártico, éste antártico; y éstos, según la oblicuidad del horizonte, o sea, la elevación del polo equinoccial, se hacen mayores o menores.[1]

Queda el meridiano que pasa por los polos del horizonte y por los del ecuador, y que, por tanto, es perpendicular a ambos círculos; cuando el Sol lo alcanza señala el mediodía y la medianoche. Pero estos dos círculos que tienen el centro en la superficie de la Tierra (me refiero al horizonte y al meridiano) siguen el movimiento de la Tierra, según nuestro punto de mira. Pues el ojo toma siempre el papel de centro de la esfera de todo lo visible que le rodea. Además, todos los círculos tomados en la Tierra producen en el cielo sus imágenes y las de los círculos semejantes a ellos, como se demuestra en cosmografía y en lo relativo a las dimensiones de la Tierra. Y éstos son los círculos que tienen nombres propios, pudiendo designarse los demás de infinitas maneras.

2. ACERCA DE LA OBLICUIDAD DE LA ECLÍPTICA, DE LAS DISTANCIAS ENTRE LOS TRÓPICOS Y DE CÓMO SE DETERMINAN

Puesto que el círculo de la eclíptica, entre los trópicos, atraviesa oblicuamente al círculo ecuatorial, considero ya necesario que probemos la distancia entre los trópicos y por lo tanto cuánto mide el ángulo de sección entre el círculo ecuatorial y el de la eclíptica. Esto es necesario percibirlo por los sentidos y con el manejo de instrumentos, por medio de los cuales se domina mucho mejor. De manera que se prepara un cuadrado de madera, o mejor de una materia más sólida, de piedra o de metal, para que la madera, variable a causa de las alteraciones del aire, no pueda equivocar al que trabaja. Sea, además, la suya una superficie completamente plana y que tenga una anchura (suficiente para recibir secciones) como de tres o cuatro codos. Así pues, a partir de uno de los ángulos, tomado como centro, se señala [en la madera] la cuarta parte de un círculo, a tenor de su capacidad [tomando como radio un lado], y se divide en XC partes iguales, las cuales a su vez se subdividen en LX fracciones o las que pueda admitir. Entonces se aplica al centro [del cuadrante] una varita muy bien torneada cilíndricamente, perpendicular a la superficie y que sobresalga un poco, quizá la anchura de un dedo o menos.

1. Es decir, la magnitud del círculo de las estrellas siempre visibles varía inversamente con la oblicuidad del horizonte y directamente con la elevación de los polos del ecuador.

Preparado así este instrumento, conviene trazar la línea del meridiano en el pavimento, extendido en el plano del horizonte y debidamente igualado por medio de un hidroscopio o un corobante, para que no se incline hacia parte alguna. Así pues, descrito un círculo en éste, se erige un gnomon en su centro, y observando un poco antes del mediodía, señalaremos dónde toca la extremidad de la sombra a la circunferencia del círculo. Actuaremos de igual manera después del mediodía, y cortaremos en dos el arco del círculo que está entre las dos señales anotadas. De este modo, la línea recta trazada desde el centro a través del punto de la sección, nos mostrará infaliblemente la dirección meridional y la septentrional. Sobre ésta [línea] como base, se levanta el plano del instrumento y se fija en posición perpendicular, vuelto el centro [del cuadrante] hacia el sur, desde el cual una línea que descienda exactamente converge con la línea meridiana en ángulo recto. De este modo se consigue que la superficie del instrumento contenga el círculo meridiano.

A partir de aquí, en los días de verano y en el solsticio de invierno hay que observar las sombras del Sol, cayendo por el centro [del cuadrante] a través de aquel índice o cilindro (señalando en cualquier parte junto al arco del cuadrante, con lo que el lugar de la sombra se consigne con seguridad) y anotaremos lo más cuidadosamente posible el punto medio de la sombra en grados y minutos. Si hiciéramos esto, el arco que se encuentre entre dos sombras señaladas, la de invierno y la de verano, nos mostrará la distancia entre los trópicos y la oblicuidad total de la eclíptica.[1] Si tomamos la mitad de este arco, tendremos cuánto distan los trópicos del ecuador, y quedará claro cuán grande es el ángulo de inclinación del ecuador con respecto al círculo de la eclíptica.

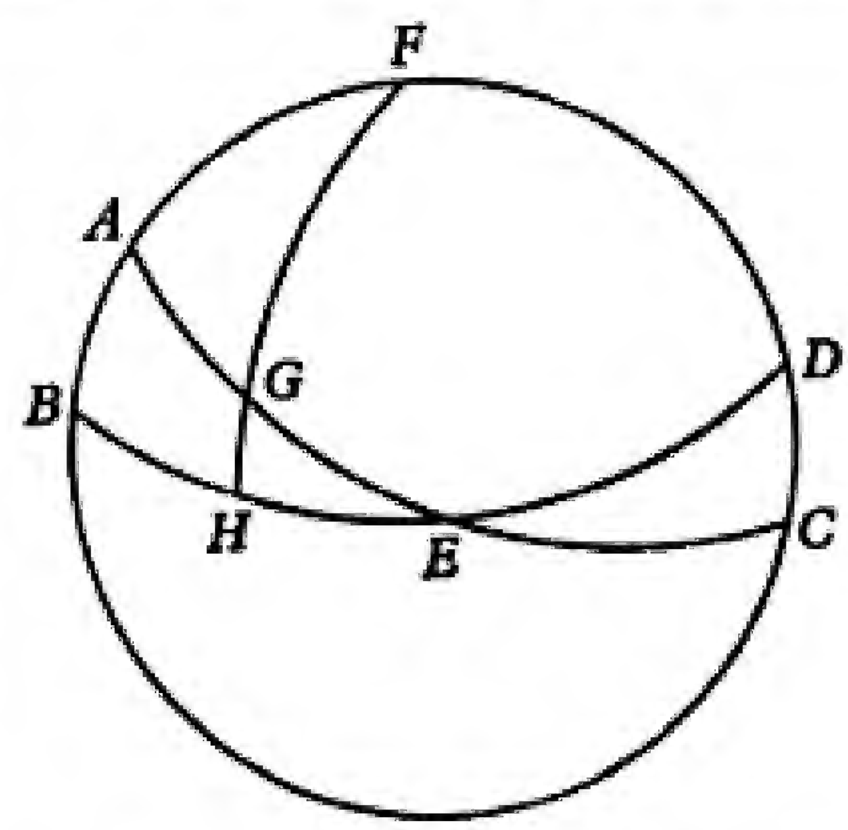
En consecuencia, Ptolomeo consideró este intervalo, que está entre los ya señalados límites, el boreal y el austral, de IIIL grados, XLII minutos, XL segundos, de los que el círculo tiene CCCLX, además de lo que ya aparece observado por Hiparco y Eratóstenes antes que él: XI partes de las que todo un círculo tendría XVIIC; y, por tanto, la mitad que es de XXIII grados, LI minutos, XX segundos, de los cuales el círculo tiene CCCLX grados, demuestra plenamente la distancia de los trópicos al círculo ecuatorial, y el ángulo de sección con la eclíptica. Pensó, pues, Ptolomeo que era así invariablemente y que así permanecería siempre. Pero desde aquel tiempo hasta nosotros se ha encontrado que éstos han decrecido continuamente. En efecto, se ha descubierto ahora por nosotros, y por algunos otros coetáneos nuestros, que la distancia entre los trópicos no es más de XLVI grados y aproximadamente LVIII minutos, y el ángulo de sección de XXIII grados, XXIX minutos, de modo que se pone de manifiesto ya suficientemente que la oblicuidad de la eclíptica es móvil; acerca de lo cual mostraremos más adelante la conjetura bastante probable de que nunca fue mayor de XXIII grados, LII minutos, y nunca será menor de XXIII grados, XXVIII minutos.

1. Como la distancia entre el Sol y la Tierra es imperceptible en comparación con el radio de la esfera de las estrellas fijas, el centro del cuadrante puede ser tomado como el centro de la esfera de las estrellas fijas.

3. ACERCA DE LOS ARCOS Y ÁNGULOS EN QUE SE CORTAN LOS CÍRCULOS DEL ECUADOR, DE LA ECLÍPTICA Y DEL MERIDIANO, A PARTIR DE LOS CUALES HAY UNA DECLINACIÓN Y ASCENSIÓN RECTA, Y ACERCA DE SU CÁLCULO

En consecuencia, a lo que decíamos con respecto al horizonte, que en él nacen y mueren las partes del mundo, añadimos que el cielo está dividido en dos por el círculo meridiano, el cual, en el espacio de XXIIII horas, atraviesa tanto a la eclíptica como al ecuador y divide las circunferencias cortándolas en la intersección de primavera o de otoño, y a la vez queda dividida su circunferencia, interceptada por aquéllos [círculos]. Siendo todos círculos máximos, constituyen un triángulo esférico rectángulo; porque constituye un ángulo recto aquel donde el meridiano corta al ecuador trazados por los polos, según se definió. Así pues, el arco del meridiano o de cualquier círculo que pasa por los polos, así interceptado, se denomina la declinación de un segmento del zodíaco. En cambio, el arco correspondiente a partir del círculo de ecuador se llama ascensión recta, que se establece conjuntamente con el arco similar del zodíaco.

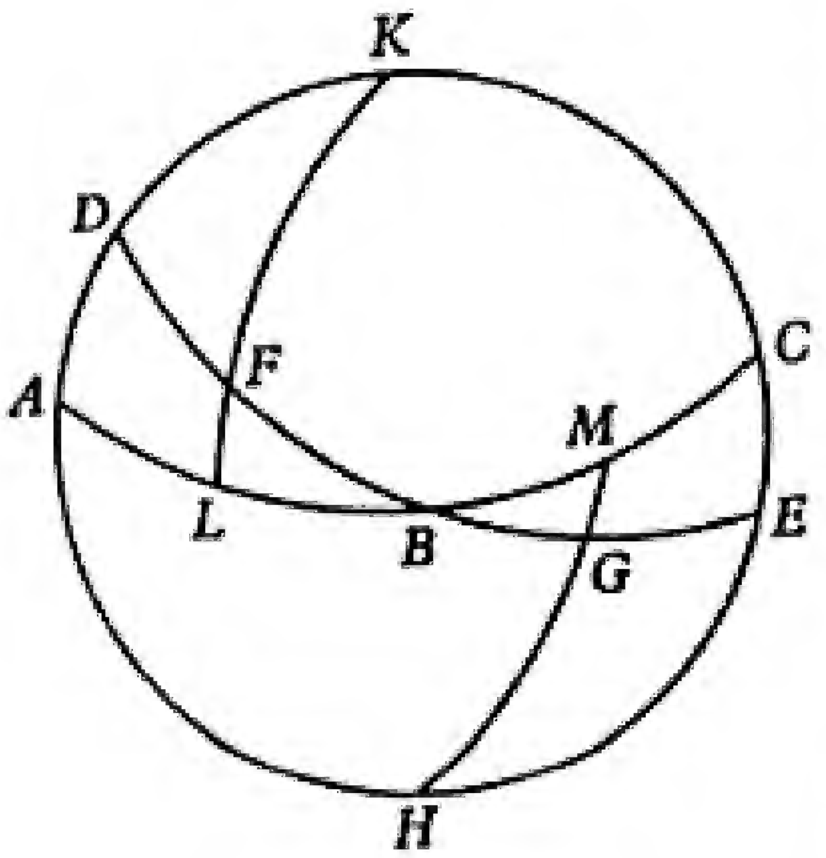
Todo esto se demuestra fácilmente mediante un triángulo convexo. Sea ABCD un círculo que pasa a la vez por los polos del ecuador y del zodíaco, al que muchos denominan coluro, sea AEC la mitad de la eclíptica, BED la mitad del ecuador, el equinoccio de primavera esté en el punto E, el solsticio de verano en el A, el solsticio de invierno en el C. Tómese F como polo del movimiento diario y sobre la eclíptica un arco EG de XXX grados por ejemplo, al que corta un cuadrante de círculo FGH. Entonces, es evidente que en el triángulo EGH se conoce un lado, EG, de XXX grados, con el ángulo GEH, que según la máxima declinación AB tendría un mínimo de XXIII grados, XXVIII minutos, siendo CCCLX igual a cuatro rectos, y el ángulo GHE es recto.



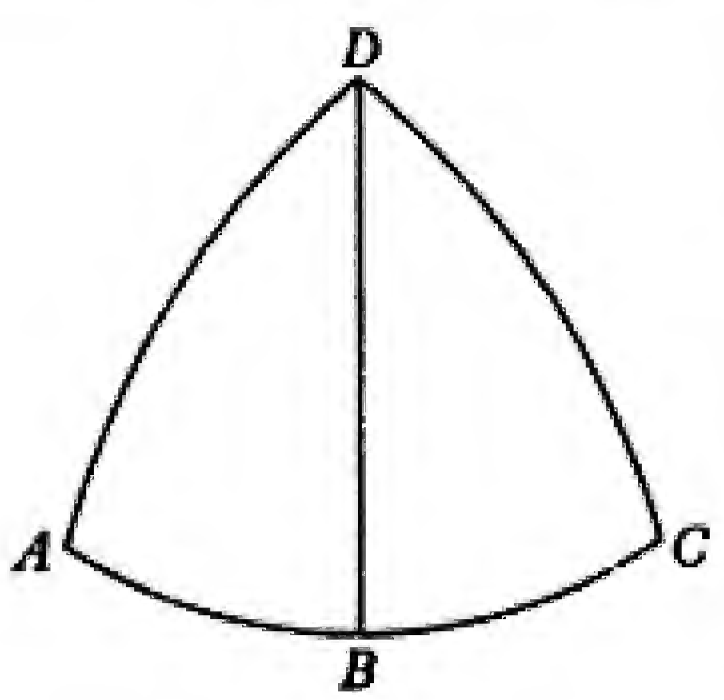
En consecuencia, por el cuarto teorema de los triángulos esféricos, el triángulo EGH será de ángulos y lados conocidos. Sin duda se demostró que la cuerda del doble de EG es a la cuerda del doble de GH, como el doble de la cuerda de AGE, o sea, del diámetro de la esfera, es a la cuerda del doble de AB; estando sus semicuerdas en la misma proporción. En consecuencia, la semicuerda del doble de AGE es la distancia desde el centro [radio] igual a $\bar{c}$ [100.000] unidades, y la semicuerda del doble de AB de 39.822 de las mismas unidades, y la del doble de EG de 50.000 unidades; y si cuatro números son proporcionales, el producto de los medios es igual al producto de los extremos, por tanto tendremos que la mitad de la cuerda del doble del arco GH será de 19.911 unidades, y el arco GH, según las tablas, será de XI grados, XXIX minutos, correspondiente a la declinación del segmento EG. Por lo tanto, también en el triángulo AFG se dan los lados: FG es igual a LXXVIII grados, XXXI minutos, y AG de LX de los mismos grados, como lo que queda de un cuadrante, y el ángulo FAG es recto; lo mismo ocurrirá con las cuerdas del doble de los arcos FG, AG, FGH y BH, o sea, serán

proporcionales a sus semicuerdas. Como de éstas, tres son conocidas, también se conocerá la cuarta BH, igual a LXII grados, VI minutos, que es la ascensión recta a partir del solsticio de verano, o HE igual a XXVII grados, LIIII minutos, ascensión recta desde el equinoccio de primavera. De igual modo, partiendo de los lados dados FG de LXXVIII grados, XXXI minutos, y AF de LXIIII grados, XXX minutos, y del cuadrante del círculo, tendremos el ángulo AGF, de LXIX grados, XXIII minutos y medio aproximadamente, igual a su opuesto por el vértice HGE. Procederemos en los demás casos como en este ejemplo.

No conviene ignorar que el círculo meridiano corta en ángulos rectos a la eclíptica, en los puntos en los que la eclíptica toca a los trópicos; pues entonces la corta pasando por los polos, como dijimos. Pero en los puntos equinocciales forma un ángulo menor que un recto, debido a la inclinación de la eclíptica desviándose del ángulo recto, siendo su valor de LXVI grados, XXXII minutos. Hay que advertir que a arcos iguales de la eclíptica, tomados a partir de los puntos del equinoccio o del solsticio, se siguen ángulos y lados iguales de los triángulos. De este modo, si describimos el arco equinoccial ABC y el de la eclíptica DBE, que se cortan en el punto B, donde está el equinoccio, y si tomamos los arcos FB y BG iguales, y si trazamos por el polo del movimiento diario, que es K, dos cuadrantes de círculo KFL y HGM, tendremos dos triángulos FLB y BMG, cuyos lados BF y BG son iguales y también son iguales los ángulos opuestos por el vértice B, y los ángulos en L y M son rectos: en consecuencia, por el sexto teorema de los triángulos esféricos, se demuestra que son de lados y ángulos iguales. Así, son iguales las declinaciones FL y MG, las ascensiones rectas LB y BM, y el ángulo restante F con el que queda G.



Del mismo modo quedará patente suponiendo arcos iguales a partir de un punto trópico [solsticio], tal como AB y BC, si fueran iguales sus distancias al punto de contacto B en el trópico. Pues, trazando desde D, polo del círculo ecuatorial, los cuadrantes DA, DB, serían semejantes los triángulos ABD y DBC, cuyas bases AB y BC son iguales, el lado BD común a ambos y los ángulos en B rectos: por el octavo teorema de los triángulos esféricos se demostrará que dichos triángulos son de lados y ángulos iguales.



Con lo que se pone de manifiesto que, en la eclíptica, lo expuesto sobre los ángulos y arcos de un cuadrante está de acuerdo con los restantes cuadrantes de todo el círculo. Presentaremos un ejemplo de estas cosas con la descripción de las tablas. En la primera columna se colocarán los grados de la eclíptica, en segundo lugar las declinaciones que corresponden a aquellos grados, en tercer lugar los minutos, en los que difieren, por defecto o por exceso, las declinaciones parciales, la mayor de tales diferencias es de XXIIII minutos, y cuyo límite se produce bajo la máxima oblicuidad de la eclíptica. Haremos lo mismo en la tablilla de los ángulos. Pues es necesario, con respecto al cam-

Tabla de declinaciones

Eclíptica	*Declinaciones*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Declinaciones*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Declinaciones*		*Diferencias*
°	°	'	'	°	°	'	'	°	°	'	'
1	0	24	0	31	11	50	11	61	20	23	20
2	0	48	1	32	12	11	12	62	20	35	21
3	1	12	1	33	12	32	12	63	20	47	21
4	1	36	2	34	12	52	13	64	20	58	21
5	2	0	2	35	13	12	13	65	21	9	21
6	2	23	2	36	13	32	14	66	21	20	22
7	2	47	3	37	13	52	14	67	21	30	22
8	3	11	3	38	14	12	14	68	21	40	22
9	3	35	4	39	14	31	14	69	21	49	22
10	3	58	4	40	14	50	14	70	21	58	22
11	4	22	4	41	15	9	15	71	22	7	22
12	4	45	4	42	15	27	15	72	22	15	23
13	5	9	5	43	15	46	16	73	22	23	23
14	5	32	5	44	16	4	16	74	22	30	23
15	5	55	5	45	16	22	16	75	22	37	23
16	6	19	6	46	16	39	17	76	22	44	23
17	6	41	6	47	16	56	17	77	22	50	23
18	7	4	7	48	17	13	17	78	22	55	23
19	7	27	7	49	17	30	18	79	23	1	24
20	7	49	8	50	17	46	18	80	23	5	24
21	8	12	8	51	18	1	18	81	23	10	24
22	8	34	8	52	18	17	18	82	23	13	24
23	8	57	9	53	18	32	19	83	23	17	24
24	9	19	9	54	18	47	19	84	23	20	24
25	9	41	9	55	19	2	19	85	23	22	24
26	10	3	10	56	19	16	19	86	23	24	24
27	10	25	10	57	19	30	20	87	23	26	24
28	10	46	10	58	19	44	20	88	23	27	24
29	11	8	10	59	19	57	20	89	23	28	24
30	11	29	11	60	20	10	20	90	23	28	24

Tabla de ascensiones rectas

Eclíptica	*Tempora*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Tempora*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Tempora*		*Diferencias*
°	Unid.	Min.	'	°	Unid.	Min.	'	°	Unid.	Min.	'
1	0	55	0	31	28	54	4	61	52	51	4
2	1	50	0	32	29	51	4	2	59	54	4
3	2	45	0	33	30	50	4	63	60	57	4
4	3	40	0	34	31	46	4	64	62	0	4
5	4	35	0	35	32	45	4	65	63	3	4
6	5	30	0	36	33	43	5	66	64	6	3
7	6	25	1	37	34	41	5	67	65	9	3
8	7	20	1	38	35	40	5	68	66	13	3
9	8	15	1	39	36	38	5	69	67	17	3
10	9	11	1	40	37	37	5	70	68	21	3
11	10	6	1	41	38	36	5	71	69	25	3
12	11	0	2	42	39	35	5	72	70	29	3
13	11	57	2	43	40	34	5	73	71	33	3
14	12	52	2	44	41	33	6	74	72	38	2
15	13	48	2	45	42	31	6	75	73	43	2
16	14	43	2	46	43	31	6	76	74	47	2
17	15	39	2	47	44	32	5	77	75	52	2
18	16	34	3	48	45	32	5	78	76	57	2
19	17	31	3	49	46	32	5	79	78	2	2
20	18	27	3	50	47	33	5	80	79	7	2
21	19	23	3	51	48	34	5	81	80	12	1
22	20	19	3	52	49	35	5	82	81	17	1
23	21	15	3	53	50	36	5	83	82	22	1
24	22	10	4	54	51	37	5	84	83	27	1
25	23	9	4	55	52	38	4	85	84	33	1
26	24	6	4	56	53	41	4	86	85	38	0
27	25	3	4	57	54	43	4	87	86	43	0
28	26	0	4	58	55	45	4	88	87	48	0
29	26	57	4	59	56	46	4	89	88	54	0
30	27	54	4	60	57	48	4	90	90	0	0

Tabla de los ángulos meridianos

Eclíptica	*Ángulo*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Ángulo*		*Diferencias*	*Eclíptica*	*Ángulo*		*Diferencias*
°	°	'	'	°	°	'	'	°	°	'	'
1	66	32	24	31	69	35	21	61	78	7	12
2	66	33	24	32	69	48	21	62	78	29	12
3	66	34	24	33	70	0	20	63	78	51	11
4	66	35	24	34	70	13	20	64	79	14	11
5	66	37	24	35	40	26	20	65	79	36	11
6	66	39	24	36	70	39	20	66	79	59	10
7	66	42	24	37	70	53	20	67	80	22	10
8	66	44	24	38	71	7	19	68	80	45	10
9	66	47	24	39	71	22	19	69	81	9	9
10	66	51	24	40	71	36	19	70	81	33	9
11	66	55	24	41	71	52	19	71	81	58	8
12	66	59	24	42	72	8	18	72	82	22	8
13	67	4	23	43	72	24	18	73	82	46	7
14	67	10	23	44	72	39	18	74	83	11	7
15	67	15	23	45	72	55	17	75	83	35	6
16	67	21	23	46	73	11	17	76	84	0	6
17	67	27	23	47	73	28	17	77	84	25	6
18	67	34	23	48	73	47	17	78	84	50	5
19	67	41	23	49	74	6	16	79	85	15	5
20	67	49	23	50	74	24	16	80	85	40	4
21	67	56	23	51	74	42	16	81	86	5	4
22	68	4	22	52	75	1	15	82	86	30	3
23	68	13	22	53	75	21	15	83	86	55	3
24	68	22	22	54	75	40	15	84	87	3	3
25	68	32	22	55	76	1	14	85	87	53	2
26	68	41	22	56	76	21	14	86	88	17	2
27	68	51	22	57	76	42	14	87	88	41	1
28	69	2	21	58	77	3	13	88	89	6	1
29	69	13	21	59	77	24	13	89	89	33	0
30	169	24	21	60	77	45	13	90	90	0	0

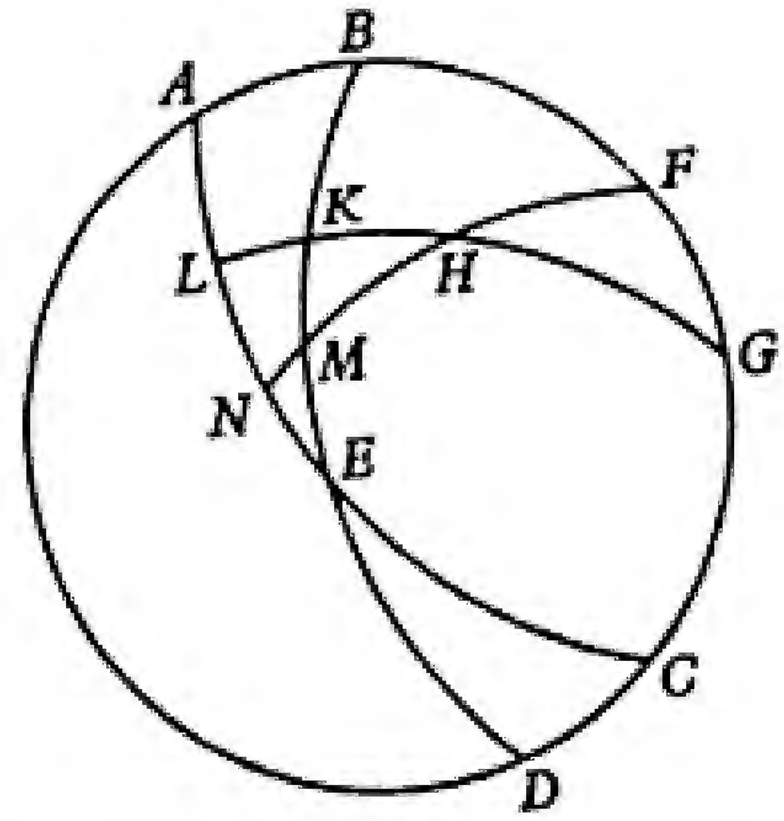
bio de oblicuidad de la eclíptica, cambiar todo lo que sigue a esa misma oblicuidad. Además en la ascensión recta en gran medida se encuentra la misma diferencia, puesto que no excede una décima parte de un solo «tiempo»; y que en el espacio de una hora realiza sólo la centésima quincuagésima parte [1/150] de un «tiempo». Los antiguos llamaron, «tiempo» a las partes del ecuador, que se originan junto con las partes de la eclíptica, CCCLX partes de uno y otra constituyen un círculo, según hemos dicho varias veces; pero, para distinguirlas, la mayoría llamaron grados a las partes de la eclíptica y «tiempos» a las del ecuador, lo que nosotros imitaremos en el resto de la obra. Aunque estas diferencias son tan pequeñas, que con razón pueden menospreciarse, sin embargo no es molesto aplicarlas también en esta [tabla].

Se han expuesto los datos respecto a la oblicuidad mínima de la eclíptica, datos que aunque parezcan ser suficientes, a nosotros nos parecen muy escasos. A partir de aquí pueden aplicarse las tablas a cualquier otra oblicuidad de la eclíptica, si en razón de la diferencia entre la mínima y la máxima oblicuidad de la eclíptica se discierne entre las partes semejantes en cada caso. Por ejemplo, si con una oblicuidad de XXIII grados, XXXIIII minutos, quisiera conocer qué declinación debe tener una distancia de XXX grados de la eclíptica, tomados a partir del ecuador, encuentro en la tabla [de declinaciones] XI grados, XXIX minutos, y en [la columna de] diferencias XI minutos, que se añaden al total en el caso de la máxima oblicuidad de la eclíptica, que era, como hemos dicho, de XXIII grados, LII minutos. Pero ya se ha señalado que la oblicuidad es de XXIII grados, XXXIIII minutos, luego diré que es VI minutos mayor que la oblicuidad mínima, o sea, la cuarta parte de XXIV minutos en los que excede la máxima oblicuidad. Estando en una proporcionalidad semejante III minutos a XI, los cuales cuando los haya sumado a los XI grados, XXIX minutos, tendré XI grados, XXXII minutos, con los que se obtendrá entonces la declinación de los XXX grados de la eclíptica tomados desde el ecuador. Del mismo modo convendrá hacer con respecto a los ángulos y a las ascensiones rectas, excepto que siempre conviene añadir [la diferencia] a éstas, restarla siempre a aquéllos [ángulos meridianos], para que se proceda más correctamente con relación al tiempo.

4. CÓMO DETERMINAR LA DECLINACIÓN Y ASCENSIÓN RECTA DE CUALQUIER ASTRO EXTERIOR AL CÍRCULO QUE PASA POR LA MITAD DE LOS SIGNOS [ECLÍPTICA], PERO CUYA LATITUD JUNTO CON LA LONGITUD HA SIDO ESTABLECIDA, Y EN QUÉ GRADO DE LA ECLÍPTICA DIVIDE POR LA MITAD AL CIELO

Se ha expuesto lo referente a la eclíptica, al ecuador y a sus intersecciones. Pero, con respecto a la revolución diaria, no sólo interesa saber lo que se manifiesta a través de la eclíptica, por medio de lo cual se descubren las causas tan sólo de la apariencia solar, sino que también se demostrarán de la misma manera la declinación desde el círculo ecuatorial y la ascensión recta de las estrellas fijas y las errantes, que están fuera de la eclíptica, y cuya longitud y latitud han sido dadas. Trácese, pues, el círculo ABCD que pase por los polos del ecuador y de la eclíptica, sea AEC el semicírculo ecuatorial con

el polo en F, y el semicírculo BED de la eclíptica con el polo en G, su intersección con el ecuador en el punto E. Después, desde el polo G, a través de una estrella, se traza el arco GHKL, y sea el punto H el lugar correspondiente a la estrella, a través de la cual, desde el polo del movimiento diurno, desciende el cuadrante del círculo FHMN. Entonces se manifiesta que la estrella que está en H cae dentro del meridiano junto con los dos puntos M y N, y el arco HMN es la declinación de la estrella con respecto al círculo del ecuador y EN la ascensión recta en la esfera: lo que buscamos.



En consecuencia, puesto que en el triángulo KEL se da el lado KE y el ángulo KEL, y el EKL es recto, luego según el cuarto teorema de los triángulos esféricos se dan los lados KL y EL junto con el otro ángulo KLE; por tanto se da el arco completo HKL. Y ya que en el triángulo HLN se dan dos ángulos, el HLN y el recto LNH, con el lado HL: luego por el mismo cuarto teorema de los triángulos esféricos se dan los restantes lados, el HN, declinación de la estrella, el LN, y el que queda NE, ascensión recta, por la cual se mide el cambio de la esfera desde el equinoccio a la estrella.

O de otro modo. Si, a partir de lo que precede, tomas el arco KE de la eclíptica como ascensión recta de LE, la tabla de las ascensiones rectas proporcionará inversamente LE y también LK, como la declinación correspondiente a LE, y el ángulo KLE por la tabla de los ángulos meridianos, a partir de todo esto, se conocerán los demás [lados y ángulos] según ya se ha demostrado.

De donde los grados del arco de la eclíptica EM se dan a partir de la ascensión recta EN, por medio de los cuales la estrella, junto con el punto M, divide por la mitad el cielo.

5. DE LAS SECCIONES DEL HORIZONTE

El círculo del horizonte de la esfera recta es uno, y otro diferente es el de la esfera oblicua. En efecto, se llama horizonte de la esfera recta aquel con respecto al cual se levanta perpendicularmente el ecuador, o que pasa por los polos del círculo equinoccial. Por el contrario, llamamos horizonte de esfera oblicua aquel con respecto al cual se inclina el círculo del ecuador. Por lo tanto, en el horizonte recto todos los astros salen y se ponen y los días se producen siempre iguales a las noches. Pues el horizonte corta por la mitad todos los paralelos descritos en el movimiento diario, esto es, pasa por sus polos, y allí sucede lo que ya explicamos acerca de los meridianos. Pero aquí tomamos el día desde la salida del Sol hasta el ocaso, no desde la luz hasta las tinieblas como entiende el vulgo, esto es, desde el amanecer hasta la primera antorcha, acerca de lo cual daremos muchas explicaciones con respecto al orto y ocaso de los signos [del zodíaco].

Por el contrario, donde el eje de la Tierra es perpendicular al horizonte, nada sale ni se pone, sino que en su giro todos los astros que se mueven están siempre visibles o siempre ocultos, a no ser por el efecto de otro movimiento, como es el anual alrededor del Sol: de donde se sigue que el día dura allí continuamente durante seis meses, la no-

che el resto del año, y no ven otra separación que la del invierno y verano, puesto que el círculo ecuatorial coincide allí con el horizonte.

Por otra parte, en la esfera oblicua salen y se ponen ciertas estrellas, otras están siempre visibles o siempre ocultas: mientras tanto los días y las noches se hacen desiguales. Donde el horizonte que es oblicuo toca dos círculos paralelos según la medida de su inclinación, uno de ellos, el que está junto al polo visible, delimita el ámbito de los astros visibles, y por el contrario, el que está junto al polo que no se ve, delimita lo que siempre está oculto. Por lo tanto, al incidir el horizonte entre estos límites a lo largo de su latitud total, corta en dos partes a todos los paralelos en arcos desiguales, excepto al ecuador, que es el mayor de los paralelos, y los círculos máximos se cortan entre sí en dos partes. Así pues, el horizonte oblicuo divide, en el hemisferio superior junto al polo visible, arcos de paralelos mayores que los del lado del polo oculto, el austral, y lo inverso acontece en el hemisferio oculto. En los cuales, el Sol, visible a causa del movimiento diario, produce la disparidad de los días y las noches.

6. SOBRE CUÁLES PUEDEN SER LAS DIFERENCIAS DE LAS SOMBRAS DEL MEDIODÍA

Hay también diferencias entre las sombras del mediodía, por las que unas [gentes] se llaman periscios, otros anfiscios, otros heteroscios.

Periscios son aquellos a los que podemos llamar «circumumbrátiles», porque distribuyen la sombra del Sol en todo su alrededor. Y son aquellos cuyo vértice o polo del horizonte dista menos, o no más, del polo de la Tierra que el trópico del ecuador. Pues, allí, los paralelos a los que toca el horizonte, existiendo como límites entre las estrellas siempre visibles y las que están siempre ocultas, son mayores que los trópicos o iguales. Y por tanto, el Sol estival que brilla entre las estrellas siempre visibles proyecta en ese tiempo las sombras del gnomon en todas las direcciones. En cambio, cuando el horizonte toca los trópicos, ellos mismos se convierten en límites entre las estrellas siempre visibles y las que están siempre ocultas. Por lo cual, en vez de ser medianoche, el Sol en el solsticio aparece como rozando la Tierra, en este preciso momento todo el círculo de la eclíptica coincide con el horizonte y al instante seis signos surgen simultáneamente y otros tantos se ponen por el lado contrario, y el polo de la eclíptica coincide con el polo del horizonte.

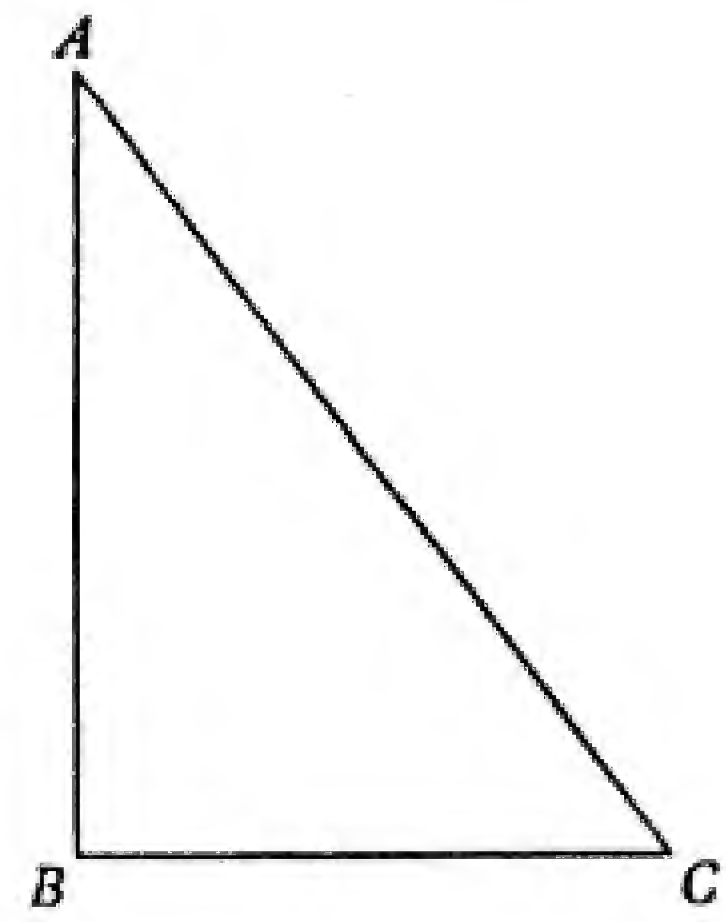
Anfiscios, los que envían las sombras del mediodía a una y otra parte, son los que habitan entre uno y otro trópico, espacio al que los antiguos llaman zona media; y puesto que el círculo de la eclíptica incide dos veces directamente sobre toda aquella región, según se demuestra en el segundo teorema de los *Phaenomena* de Euclides, allí mismo desaparecen las sombras de los gnomon dos veces, y al pasar el Sol de una a otra parte, los gnomon envían la sombra a veces hacia la zona austral, a veces hacia la boreal.

Los demás, que habitamos entre éstos y aquéllos, somos heteroscios, porque sólo enviamos sombras al mediodía hacia una parte, que es el norte.

Los matemáticos antiguos acostumbraron a dividir el orbe de la Tierra en siete climas, así Meroe, Siena, Alejandría, Rodas, Helesponto, por la mitad del Ponto, Dniéper, Bizancio y los demás, por cada paralelo, según la diferencia y exceso de los días más largos, también según la longitud de las sombras, que a mediodía observaron con gno-

mon en los días de equinoccio y en los otros cambios del Sol, y sobre todo según la elevación del polo o la latitud de cada clima. Estas cosas han cambiado en parte con el tiempo, más adelante no son las mismas que fueron antes, a causa (como hemos dicho) de la mudable oblicuidad de la eclíptica que los antiguos desconocieron: o sea, para decirlo con mayor corrección, a causa de la variable inclinación del círculo ecuatorial respecto del plano de la eclíptica, de lo que aquellas dependen. Pero las elevaciones del polo, o sea, las latitudes de los lugares, y las sombras equinocciales coinciden con las que se encuentran anotadas desde la antigüedad: lo cual era preciso que sucediera, puesto que el ecuador sigue al polo del globo terrestre. Por todo esto, aquellos climas no se designan ni definen con suficiente exactitud por determinados cambios de los días y de las sombras, sino más correctamente por sus distancias al ecuador, que siempre permanecen invariables. Pero aquel cambio en los trópicos, aun siendo muy poco considerable, admite en los lugares al sur una variación pequeña de los días y de las sombras, y se hace más evidente en los que se dirigen al norte.

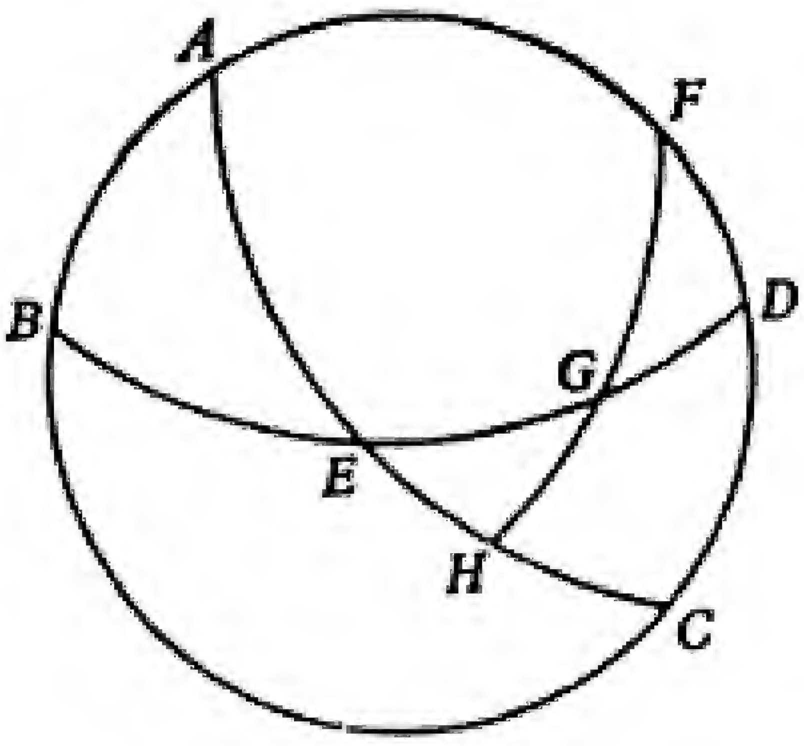
En lo que concierne a las sombras de los gnomon, es patente que para cualquier altitud determinada del Sol, se percibirá una longitud de la sombra, y viceversa. Así, si AB fuera un gnomon que arroja la sombra BC, y como el indicador es perpendicular con respecto al plano del horizonte, es necesario que el ángulo ABC sea siempre recto, por definición de las líneas perpendiculares al plano. Por lo cual, si se traza AC, tendremos el triángulo rectángulo ABC, y para una altitud determinada del Sol tendremos dado el ángulo ACB. Y por el primer teorema de los triángulos planos, estará dada la razón del gnomon AB a su sombra BC, y también la longitud de BC. Por el contrario, dados AB y BC, también constará, por el tercer teorema de los triángulos planos, el ángulo ACB y la elevación del Sol que proyecta aquella sombra según la hora. Por eso, los antiguos, en la descripción de aquellos climas del globo de la Tierra, les asignaron las longitudes de cada una de las sombras de mediodía, unas veces en los equinoccios, otras en uno u otro de los solsticios.



7. DE CÓMO SE PUEDEN DEMOSTRAR MUTUAMENTE EL DÍA MÁS LARGO, LA LATITUD DE LA SALIDA DEL SOL Y LA INCLINACIÓN DE LA ESFERA, Y SOBRE LAS RESTANTES DIFERENCIAS DE LOS DÍAS

Así pues, demostraremos simultáneamente, para cualquier oblicuidad de la esfera o inclinación del horizonte, el día más largo y más corto, con la latitud de la salida del Sol, y la restante diferencia de los días. En efecto, la latitud de la salida del Sol es un arco del círculo del horizonte, interceptado desde la salida del Sol en el solsticio de verano a la salida del Sol en el solsticio de invierno, o sea, la distancia a uno y otro solsticio desde la aparición del equinoccio.

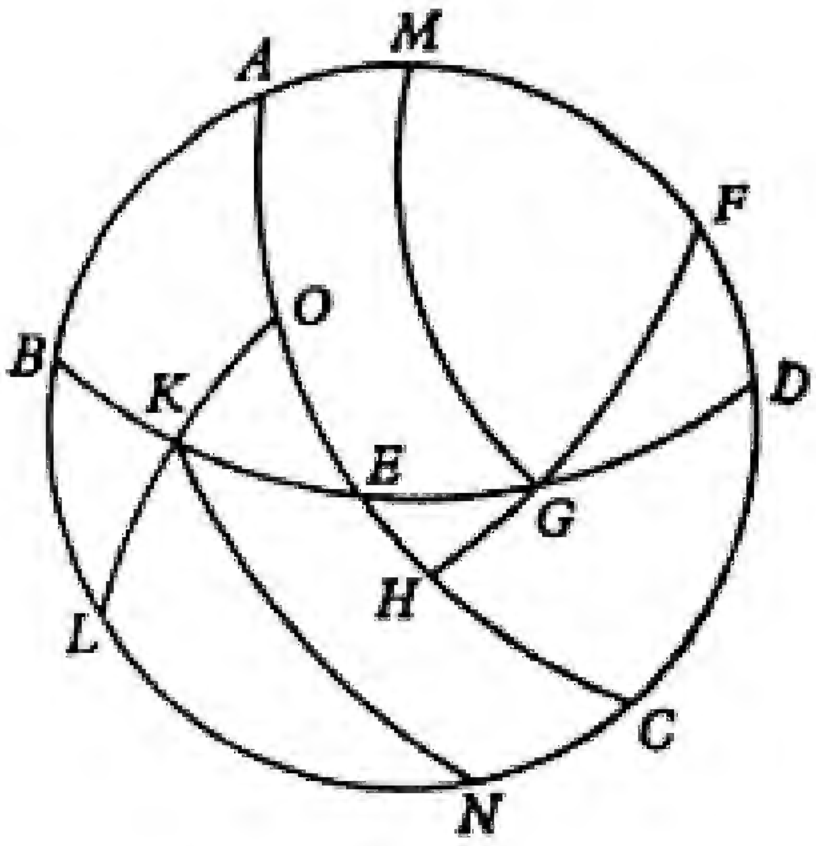
En consecuencia, sea ABCD el meridiano del orbe y BED el semicírculo del horizonte en el hemisferio oriental, AEC el semicírculo del ecuador, cuyo polo boreal sea F. Tomada la salida del Sol con la entrada del verano [solsticio] en el punto G, descríbase el arco FGH de un círculo máximo. Así pues, puesto que la movilidad de la esfera terrestre se produce alrededor del polo F del ecuador, es preciso que los puntos G, H, concuerden con el meridiano ABCD, puesto que los paralelos están alrededor de los mismos polos, a través de los cuales los círculos máximos interceptan arcos semejantes en aquellos [paralelos]. Por tanto, el mismo tiempo que hay desde la salida del Sol, en G, hasta mediodía, delimita también el arco AEH, y al CH parte restante subterránea del semicírculo desde medianoche a la salida del Sol. Hay, pues, un semicírculo AEC, cuyos cuadrantes del círculo son AE y EC, partiendo del mismo polo de ABCD; por lo tanto, EH será la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccial, y EG la latitud entre la salida del Sol en el equinoccio y en el solsticio. Por consiguiente, en el triángulo EGH, el ángulo GEH, de la oblicuidad de la esfera, es determinado por medio del arco AB, y siendo recto el ángulo GHE, dándose el lado GH por la distancia entre el trópico de verano y el ecuador, los restantes lados se darán también por el cuarto teorema de los triángulos esféricos: EH la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccial, y GE la latitud de la salida del Sol. E incluso si con el lado GH hubiera sido dado el lado EH, la mitad de la diferencia entre el día más largo y el equinoccio, o el lado EG, se da en E el ángulo de inclinación de la esfera, y de ahí FD elevación del polo sobre el horizonte.



Si no se toma el trópico, sino cualquier otro punto G en la eclíptica, no menos quedarían claros los arcos EG y EH. Puesto que, según la tabla de declinaciones expuesta más arriba, queda determinado el arco GH de declinación, el cual corresponde al mismo grado de la eclíptica, y las demás partes de la demostración quedan claras por el mismo sistema.

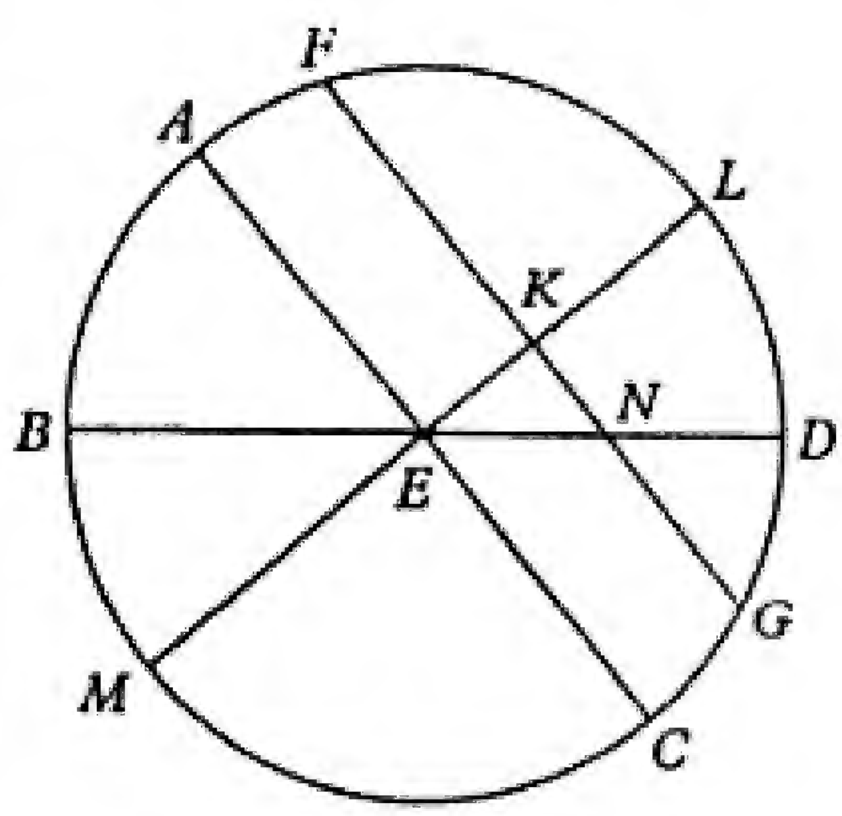
De donde se sigue que los grados de la eclíptica que equidistan del trópico cortan los mismos arcos del horizonte, desde la salida del Sol en el equinoccio y hasta el mismo número de grados, y producen las magnitudes de los días y de las noches sucesivamente iguales; esto es, porque el paralelo coincide en esos grados con la eclíptica, siendo igual la declinación para los mismos grados. Pero, tomando a una y otra parte de la sección equinoccial arcos iguales, resultan a su vez latitudes de la salida del Sol iguales, pero en diversas direcciones, y magnitudes inversas de los días y las noches, porque describirán por ambas partes arcos iguales de los paralelos, en la medida que los mismos puntos, equidistantes del ecuador, tienen iguales declinaciones desde el círculo equinoccial.

Descríbanse, pues, en la misma figura, los arcos de los paralelos GM y KN, que corten al horizonte BED en los puntos G, K, y también LKO, cuadrante del círculo máximo que pasa por el polo sur L. Así pues, ya que la declinación HG es igual a la declinación KO, se tendrán dos triángulos DFG y BLK, en los que dos lados de uno son iguales a dos lados del otro, FG es igual a LK, y las elevaciones del polo FD y LB, y los ángulos en B y D son rectos. En consecuencia, los terceros lados DG y BK son iguales,



y también son iguales lo que queda [del cuadrante] GE y EK, latitudes de la salida del Sol. Por lo tanto, siendo iguales dos lados EG, HG, a EK, KO, e iguales los ángulos que hay en el vértice E, por esto los restantes EH, EO son lados iguales; añadiendo a éstos una cantidad igual [un cuadrante], se tiene que el arco OEC es igual al AEH. Mas los círculos máximos trazados por los polos cortan arcos semejantes de los paralelos en las esferas; serán, pues, GM y KN mutuamente semejantes e iguales: como tenía que demostrarse.

Pero todo esto puede demostrarse también de otra manera. Trazado el círculo meridiano ABCD, cuyo centro es E, siendo AEC el diámetro del ecuador y sección común de ambos círculos, BED el diámetro del horizonte y línea meridiana, LEM eje de la esfera, L el polo visible, M el polo oculto. Sea AF la distancia tomada de la entrada del verano [solsticio] o cualquier otra declinación, hacia la cual se traza FG diámetro del paralelo, en una sección común con el meridiano, que cortará al eje en K, a la línea meridiana en N. Puesto que, líneas paralelas son, según definición de Posidonio, las que ni se acercan ni se alejan, sino que a las líneas perpendiculares entre sí cortan en partes iguales, la línea recta KE será igual a la mitad de la cuerda del doble del arco AF. Del mismo modo, KN será la mitad de la cuerda del arco del círculo paralelo cuyo radio es FK, por cuya diferencia el día equinoccial difiere de su contrario. Y esto es, porque todos los semicírculos, de los cuales aquéllas [rectas] son secciones comunes, esto es, de los cuales son diámetros, como BED del horizonte oblicuo, LEM del horizonte recto, AEC del equinoccio y FKG del paralelo, son perpendiculares al plano del círculo ABCD, y las secciones que se producen entre sí, según la proposición XIX del libro XI de los *Elementos* de Euclides, son perpendiculares al mismo plano en los puntos E, K, N, y por la VI proposición del mismo libro, son paralelas, y K es el centro del paralelo, E el centro de la esfera. Por todo lo cual, EN es la mitad de la cuerda del doble del arco del horizonte, por el que la salida del Sol en el paralelo difiere de la salida del Sol en el ecuador. En consecuencia, habiendo sido dada la declinación AF junto con el resto del cuadrante FL, KE la mitad de la cuerda del doble del arco AF, y FK la mitad de la cuerda del doble del arco FL, estarán divididos en unidades de las cuales AE tiene $\overline{\text{c}}$. Pero, en el triángulo rectángulo EKN, el ángulo KEN está dado con relación a DL elevación del polo, y el ángulo restante KNE es igual al AEB, porque en la esfera oblicua los paralelos se inclinan de igual modo hacia el horizonte; los lados se dan en las mismas unidades, de las cuales la línea que sale del centro de la esfera [radio] vale $\overline{\text{c}}$. En consecuencia, en estas unidades, de las que FK desde el centro del paralelo [radio] tiene $\overline{\text{c}}$, también se dará KN, como la mitad de la cuerda del arco que indica la diferencia entre el día equinoccial y el día en el paralelo, en grados de los cuales el círculo paralelo tiene CCCLX. A partir de esto, queda claro que la razón FK a KN



Diferencias de las ascensiones en una esfera oblicua

Declinación °	*Elevación del polo* 31		32		33		34		35		36	
	Unid.	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	0	36	0	37	0	39	0	40	0	42	0	44
2	1	12	1	15	1	18	1	21	1	24	1	27
3	1	48	1	53	1	57	2	2	2	6	2	11
4	2	24	2	30	2	36	2	42	2	48	2	55
5	3	1	3	8	3	15	3	23	3	31	3	39
6	3	37	3	46	3	55	4	4	4	13	4	23
7	4	14	4	24	4	34	4	45	4	56	5	7
8	4	51	5	2	5	14	5	26	5	39	5	52
9	5	28	5	54	6	8	6	22	6	22	6	36
10	6	5	6	20	6	35	6	50	7	6	7	22
11	6	42	6	59	7	15	7	32	7	49	8	7
12	7	20	7	38	7	56	8	15	8	34	8	53
13	7	58	8	18	8	37	8	58	9	18	9	39
14	8	37	8	58	9	19	9	41	10	3	10	26
15	9	16	9	38	10	1	10	25	10	49	11	14
16	9	55	10	19	10	44	11	9	11	35	12	2
17	10	35	11	1	11	27	11	54	12	22	12	50
18	11	16	11	43	12	11	12	40	13	9	13	39
19	11	56	12	25	12	55	13	26	13	57	14	29
20	12	38	13	9	13	40	14	13	14	46	15	20
21	13	20	13	53	14	26	15	0	15	36	16	12
22	14	3	14	37	15	13	15	49	16	27	17	5
23	14	47	15	23	16	0	16	38	17	17	17	58
24	15	31	16	9	16	48	17	29	18	10	18	52
25	16	16	16	56	17	38	18	20	19	3	19	48
26	17	2	17	45	18	28	19	12	19	58	20	45
27	17	50	18	34	19	19	20	6	20	54	21	44
28	18	38	19	24	20	12	21	1	21	51	22	43
29	19	27	20	16	21	6	21	57	22	50	23	45
30	20	18	21	9	22	1	22	55	23	51	24	48
31	21	10	22	3	22	58	23	55	24	53	25	53
32	22	3	22	59	23	56	24	56	25	57	27	0
33	22	57	23	54	24	19	25	59	27	3	28	9
34	23	55	24	56	25	59	27	4	28	10	29	21
35	21	53	25	57	27	3	28	10	29	21	30	35
36	25	53	27	0	28	9	29	21	30	35	31	52

(continuación)

De clina- ción °	*Elevación del polo* 37 *Unid.*	37 *Min.*	38 *Unid.*	38 *Min.*	39 *Unid.*	39 *Min.*	40 *Unid.*	40 *Min.*	41 *Unid.*	41 *Min.*	42 *Unid.*	42 *Min.*
1	0	45	0	47	0	49	0	50	0	52	0	54
2	1	31	1	34	1	37	1	41	1	44	1	48
3	2	16	2	21	2	26	2	31	2	37	2	42
4	3	1	3	8	3	15	3	22	3	29	3	37
5	3	47	3	55	4	4	4	13	4	22	4	31
6	4	33	4	43	4	53	5	4	5	15	5	26
7	5	19	5	30	5	42	5	55	6	8	6	21
8	6	5	6	18	6	32	6	46	7	1	7	16
9	6	51	7	6	7	22	7	38	7	55	8	12
10	7	38	7	55	8	13	8	30	8	49	9	8
11	8	25	8	44	9	3	9	23	9	44	10	5
12	9	13	9	34	9	55	10	16	10	39	11	2
13	10	1	10	24	10	46	11	10	11	35	12	0
14	10	50	11	14	11	39	12	5	12	31	12	58
15	11	39	12	5	12	32	13	0	13	28	13	58
16	12	29	12	57	13	26	13	55	14	26	14	58
17	13	19	13	49	14	20	14	52	15	25	15	59
18	14	10	14	42	15	15	15	49	16	24	17	1
19	15	2	15	36	16	11	16	48	17	25	18	4
20	15	55	16	31	17	8	17	47	18	27	19	8
21	16	49	17	27	18	7	18	47	19	30	20	13
22	17	44	18	24	19	6	19	49	20	34	21	20
23	18	39	19	22	20	6	20	52	21	39	22	28
24	19	36	20	21	21	8	21	56	22	46	23	38
25	20	34	21	21	22	11	23	2	23	55	24	50
26	21	34	22	24	23	16	24	10	25	5	26	3
27	22	35	23	28	24	22	25	19	26	17	27	18
28	23	37	24	33	25	30	26	30	27	31	28	36
29	24	41	25	40	26	40	27	43	28	48	29	57
30	25	47	26	49	27	52	28	59	30	7	31	19
31	26	55	28	0	29	7	30	17	31	29	32	45
32	28	5	29	13	30	54	31	31	32	54	34	14
33	29	18	30	29	31	44	33	1	34	22	35	47
34	30	32	31	48	33	6	34	27	35	54	37	24
35	31	51	33	10	34	33	35	59	37	30	39	5
36	33	12	34	35	36	2	37	34	39	10	40	51

(continuación)

De clina- ción	*Elevación del polo*											
	43		*44*		*45*		*46*		*47*		*48*	
°	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	0	56	0	58	1	0	1	2	1	4	1	7
2	1	52	1	56	2	0	2	4	2	9	2	13
3	2	48	2	54	3	0	3	7	3	13	3	20
4	3	44	3	52	4	1	4	9	4	18	4	27
5	4	41	4	51	5	1	5	12	5	23	5	35
6	5	37	5	50	6	2	6	15	6	28	6	42
7	6	34	6	49	7	3	7	18	7	34	7	50
8	7	32	7	48	8	5	8	22	8	40	8	59
9	8	30	8	48	9	7	9	26	9	47	10	8
10	9	28	9	48	10	9	10	31	10	54	11	18
11	10	27	10	49	11	13	11	37	12	2	12	28
12	11	26	11	51	12	16	12	43	13	11	13	39
13	12	26	12	53	13	21	13	50	14	20	14	51
14	13	27	13	56	14	26	14	58	15	30	16	5
15	14	28	15	0	15	32	16	7	16	42	17	19
16	15	31	16	5	16	40	17	16	17	54	18	34
17	16	34	17	10	17	48	18	27	19	8	19	51
18	17	38	18	17	18	58	15	40	20	23	21	9
19	18	44	19	25	20	9	20	53	21	40	22	29
20	19	50	20	35	21	21	22	8	22	58	23	51
21	20	59	21	46	22	34	23	25	24	18	25	14
22	22	8	22	58	23	50	24	44	25	40	26	40
23	23	19	24	12	25	7	26	5	27	5	28	8
24	24	32	25	28	26	26	27	27	28	31	29	38
25	25	47	26	46	27	48	28	52	30	0	31	12
26	27	3	28	6	29	11	30	20	31	32	32	48
27	28	22	29	29	30	38	31	51	33	7	34	28
28	29	44	30	54	32	7	33	25	34	46	36	12
29	31	8	32	22	33	40	35	2	36	28	38	0
30	32	35	33	53	35	16	36	43	*38*	15	39	53
31	34	5	35	28	36	56	38	29	40	7	41	52
32	35	38	37	7	38	40	40	19	42	4	43	57
33	37	16	38	50	40	30	42	15	44	8	46	9
34	38	58	40	39	42	25	44	18	46	20	48	31
35	40	46	42	33	4!	27	46	23	48	36	51	3
36	42	39	44	33	46	36	48	47	51	11	53	47

(continuación)

De clina-ción	*Elevación del polo*											
	49		*50*		*51*		*52*		*53*		*54*	
°	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
1	1	9	1	12	1	14	1	17	1	20	1	23
2	2	18	2	23	2	28	2	34	2	39	2	45
3	3	27	3	35	3	43	3	51	3	59		8
4	4	37	4	47	4	57	5	8	5	19	5	31
5	5	47	5	50	6	12	6	26	6	40	6	55
6	6	57	7	12	7	27	7	44	8	1	8	19
7	8	7	8	25	8	43	9	2	9	23	9	44
8	9	18	9	38	10	0	10	22	10	45	11	9
9	10	30	10	53	11	17	11	42	12	8	12	35
10	11	42	12	8	12	35	13	3	13	32	14	3
11	12	55	13	24	13	53	14	24	14	57	15	31
12	14	9	14	40	15	13	15	47	16	23	17	0
13	15	24	15	58	16	34	17	11	17	50	18	32
14	16	40	17	17	17	56	18	37	19	19	20	4
15	17	57	18	39	19	19	20	4	20	50	21	38
16	19	16	19	59	20	44	21	32	22	22	23	15
17	20	36	21	22	22	11	23	2	23	56	24	53
18	21	57	22	47	23	39	24	34	25	33	26	34
19	23	20	24	14	25	10	26	9	21	11	28	17
20	24	45	25	42	26	43	27	46	28	53	30	4
21	26	12	27	14	28	18	29	26	30	37	31	54
22	27	42	28	47	29	56	31	8	32	25	33	47
23	29	14	30	23	31	37	32	54	34	17	35	45
24	31	4	32	3	33	21	34	44	36	13	37	48
25	32	26	33	46	35	10	36	39	38	14	39	59
26	34	8	35	32	37	2	38	38	40	20	42	10
27	35	53	37	23	39	0	40	42	42	33	44	32
28	37	43	39	19	41	2	42	53	44	53	47	2
29	39	37	41	21	43	12	45	12	47	21	49	44
30	41	37	43	29	45	29	47	39	50	1	52	37
31	43	44	45	44	47	54	50	16	52	53	55	48
32	45	57	48	8	50	30	53	7	56	1	59	19
33	48	19	50	44	53	20	56	13	59	28	63	21
34	50	54	53	30	56	20	59	42	63	31	68	11
35	53	40	56	34	59	58	63	40	68	18	74	32
36	56	42	59	59	63	47	68	26	74	36	90	0

(continuación)

Declinación °	*Elevación del polo* 55 *Unid.*	55 *Min.*	56 *Unid.*	56 *Min.*	57 *Unid.*	57 *Min.*	58 *Unid.*	58 *Min.*	59 *Unid.*	59 *Min.*	60 *Unid.*	60 *Min.*
1	1	26	1	29	1	32	1	36	1	40	1	44
2	2	52	2	58	3	5	3	12	3	20	3	28
3	4	17	4	27	4	38	4	49	5	0	5	12
4	5	44	5	57	6	11	6	25	6	41	6	57
5	7	11	7	27	7	44	8	3	8	22	8	43
6	8	38	8	58	9	19	9	41	10	4	10	29
7	10	6	10	29	10	54	11	20	11	47	12	17
8	11	35	12	1	12	30	13	0	13	32	14	5
9	13	4	13	35	14	7	14	41	15	17	15	55
10	14	35	15	9	15	45	16	23	17	4	17	47
11	16	7	16	45	17	25	18	8	18	53	19	41
12	17	40	18	22	19	6	19	53	20	43	21	36
13	19	15	20	1	20	50	21	41	22	36	23	34
14	20	52	21	42	22	35	23	31	24	31	25	35
15	22	30	23	24	24	22	25	23	26	29	27	39
16	24	10	25	9	26	12	27	19	28	30	29	47
17	25	53	26	57	28	5	29	18	30	35	31	59
18	27	39	28	48	30	1	31	20	32	44	34	19
19	29	27	30	41	32	1	33	26	34	58	36	37
20	31	19	32	39	34	5	35	37	37	17	39	5
21	33	15	34	41	36	14	37	54	39	42	41	40
22	35	14	36	48	38	28	40	17	42	15	44	25
23	37	19	39	0	40	49	42	47	44	57	47	20
24	39	29	41	18	43	17	45	26	47	49	50	27
25	41	45	43	44	45	54	48	16	50	54	53	52
26	44	9	46	18	48	41	51	19	54	16	57	39
27	46	41	49	4	51	41	54	38	58	0	61	57
28	49	24	52	1	54	58	58	19	62	14	67	4
29	52	20	55	16	58	36	62	31	67	18	73	46
30	55	32	58	52	62	45	67	31	73	55	90	0
31	59	6	62	58	67	42	74	4	90	0		
32	63	10	67	53	74	12	90	0				
33	68	1	74	19	90	0						
34	74	33	90	0								
35	90	0										
36												

Lo que aquí falta pertenece a aquellos [astros] que ni nacen ni se ponen.

consta de dos razones: es decir, de la cuerda del doble de FL a la cuerda del doble de AF, esto es, FK es a KE, y de la cuerda del doble de AB a la cuerda del doble de DL, esto es, como EK es a KN, por lo tanto EK es asumido [tomado como término medio] entre FK y KN. También de la misma manera BE es a EN se compone de la razón BE es a EK y de KE es a EN, tal como de modo más detallado demuestra Ptolomeo por medio de los segmentos esféricos.

Así estimo que se determina no sólo la desigualdad de los días y de las noches, sino también la de la Luna y la de las estrellas, y la de cualquiera cuya declinación de los paralelos descritos por ellos en el movimiento diurno hubiera sido dada, y diferenciaría los segmentos que están en la parte superior de la Tierra [hemisferio norte] de los que están en la parte inferior, por lo que fácilmente podría entenderse el nacimiento y ocaso de aquéllos [astros].

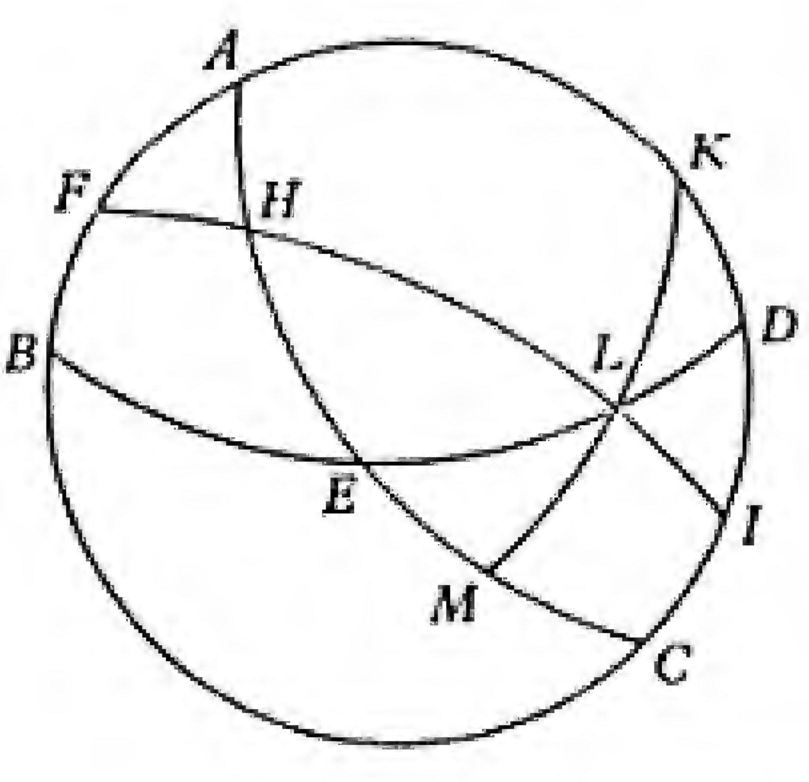
8. ACERCA DE LAS HORAS Y DE LAS PARTES DEL DÍA Y DE LA NOCHE

En consecuencia, partiendo de estas cosas, es evidente que, una vez tomada en la tabla la diferencia de los días correspondiente a la propuesta elevación del polo junto con la declinación del Sol, la añadiéramos a un cuadrante del círculo en la declinación boreal, o la sustrajéramos en la austral, y multiplicamos por dos lo que resulte, tendremos la magnitud de aquel día, y lo que quede del círculo será la duración de la noche; uno y otro de esos segmentos, divididos por XV unidades de tiempo [«temporas»], mostrará cuántas horas iguales hay. Pero tomando la duodécima parte, tendremos el contenido de una hora de tiempo. Y estas horas toman el nombre de su día, del cual siempre son la doceava parte. Por esto han sido llamadas por los antiguos horas solsticiales [solsticio de verano], equinocciales y brumales [solsticio de invierno]. Pero desde antiguo no se utilizaron otras nada más que estas XII, desde el alba hasta las tinieblas, pues la noche la dividían en cuatro vigilias o vigilancias: y tal uso de las horas duró mucho tiempo con el consentimiento tácito de todo el mundo. Gracias a que fueron inventadas las clepsidras, en las que por sustracción o adición de agua que goteaba acomodaban las horas a la diversidad de los días, para que cuando estuviera nublado no se ocultara la distinción del tiempo. Pero, después que el vulgo aceptara las horas como iguales y comunes a los días y a las noches, puesto que son más fáciles de observar, aquellas horas de tiempo [propias de cada una de las estaciones] llegaron a tal desuso que si se preguntara a cualquiera del vulgo cuál es la hora «prima» del día, la «tertia», o la «sexta», o la «nona», o la «undécima», no sabe qué responder o ciertamente responde lo que menos se relaciona con el tema. Ahora, algunos toman tal número de horas iguales a partir del mediodía, otros desde el ocaso, otros desde medianoche, algunos desde la salida del Sol, según lo que se haya establecido para cada ciudad.

9. SOBRE LA ASCENSIÓN OBLICUA DE LOS GRADOS DE LA ECLÍPTICA, Y CÓMO EL GRADO QUE ESTÁ EN MEDIO DE LOS CIELOS ES DETERMINADO CON RESPECTO AL GRADO DE LA SALIDA DEL SOL

Así pues, expuestas la magnitud y la diferencia de las noches y de los días, sigue en el correspondiente orden la exposición de las ascensiones oblicuas junto con sus «tiempos» [divisiones de tiempo], a las que llamaré «dodecatemorías», esto es, partes duodécimas del zodíaco, o de cualquier otro arco del mismo que se tome: no habiendo otras diferencias entre la ascensión recta y la oblicua que las que expusimos sobre el día equinoccial y el contrario. Por otra parte, las duodécimas partes, tomando prestados los nombres de seres vivos que son los nombres de las estrellas fijas, se llamaron Aries, Tauro, Géminis, Cáncer y las demás, siguiendo el orden a partir del equinoccio de primavera.

Por lo tanto, se repite para mayor evidencia el círculo meridiano ABCD, con el semicírculo ecuatorial AEC y el del horizonte BED, que se cortan en el punto E, tómese el equinoccio en H, por el cual el círculo FHI de la eclíptica corta al horizonte en L, a través de esta intersección desde el polo K del ecuador desciende el cuadrante del círculo máximo KLM. Así pues, aparece que, con el arco de la eclíptica HL, se levanta el arco equinoccial HE: pero en la esfera recta ascendía aquel arco junto con el HEM. La diferencia entre estas ascensiones es EM, la cual ya demostramos que es la diferencia partida por dos entre el día equinoccial y su contrario: pero lo que se añadía en la declinación boreal, aquí se quita, y a su vez se añade en una ascensión recta austral para volverse oblicua. Y cuantas veces aparezca cualquier signo o cualquier arco de la eclíptica, quedará de manifiesto por las ascensiones, numeradas desde el principio hasta el final.



De todo ello se sigue que habiendo sido dado algún grado de la eclíptica que se levanta, tomado desde el ecuador, se da también el que está en mitad del cielo. Por lo tanto, habiendo sido dada la declinación L del grado que nace, con respecto a la distancia HL del ecuador, también se conoce HEM la ascensión recta y todo AHEM el arco de la mitad de un día. En consecuencia, el arco restante AH es conocido, que es la ascensión recta del arco FH, el cual también se conoce por la tabla o porque en AFH se conoce el ángulo de la intersección AHF, el lado AH y el ángulo FAH que es recto. Y así, todo el arco FHL de la eclíptica se da entre el grado del orto y el grado que divide por la mitad al cielo.

Y viceversa, si el grado que mide por la mitad al cielo hubiera sido dado primero como el arco FH, conoceríamos también el grado del orto; pues se conocerá la declinación AF y el arco AFB por el ángulo de declinación de la esfera, y el arco restante FB. Ahora bien, en el triángulo BFL es conocido por lo anterior el ángulo BFL, el lado

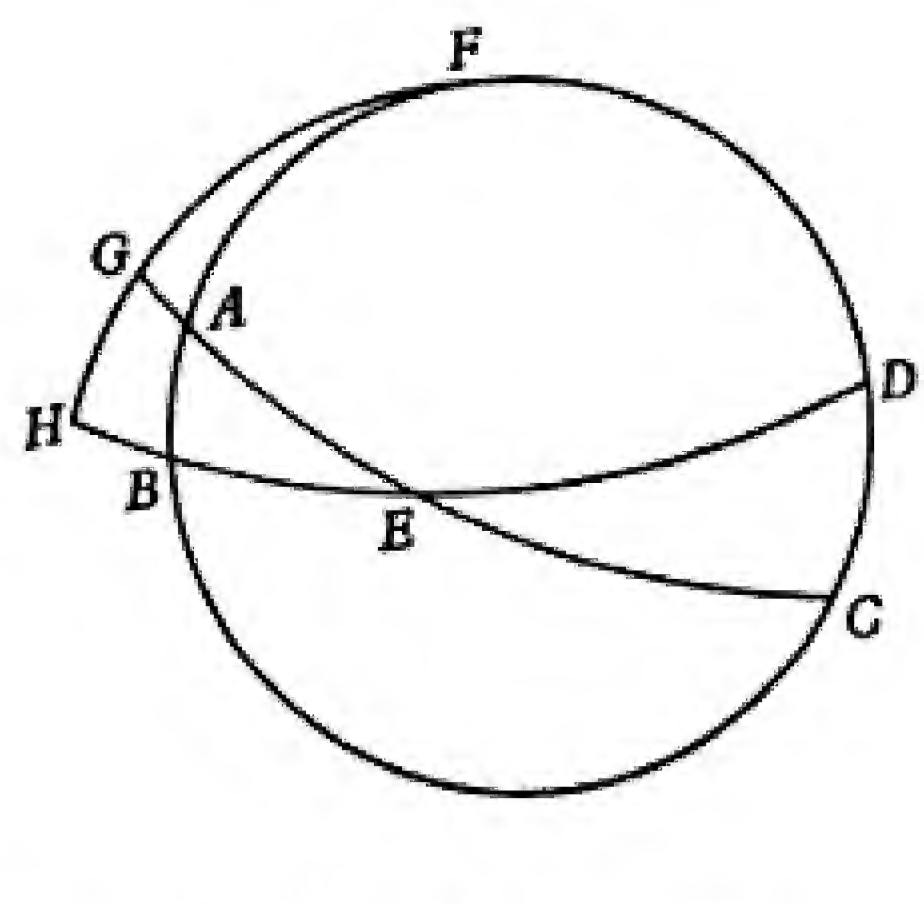
FB y el ángulo FBL es recto; luego se da el lado buscado FHL. O de otra manera, como deduciremos más abajo.

10. DEL ÁNGULO DE SECCIÓN DE LA ECLÍPTICA CON EL HORIZONTE

El círculo de la eclíptica, por ser oblicuo al eje de la esfera, describe varios ángulos con el horizonte. El hecho de que la eclíptica se eleve dos veces con respecto al horizonte para los que habitan entre los trópicos, ya lo hemos dicho acerca de las diferencias de las sombras. Pero pienso que nos es suficiente haber mostrado por lo menos los ángulos que sirven a los habitantes heteroscios, esto es, a nosotros, a partir de tales ángulos la teoría general de éstos se entenderá fácilmente.

En consecuencia, considero bastante claro que en la esfera oblicua (cuando empieza el equinoccio, o sea, en el principio de Aries) tanto más inclinada está la eclíptica y se eleva hacia el horizonte, cuanto aumenta la máxima declinación austral, la cual se manifiesta en el principio de Capricornio que se presenta entonces en medio del cielo, y a su vez la eclíptica produce el ángulo oriental de mayor elevación cuando emerge el principio de Libra, y el principio de Cáncer ocupa la mitad del cielo. Por lo que estos tres círculos, el ecuador, la eclíptica y el horizonte, convergen a través de la misma intersección común en los polos del círculo meridiano, cuyos arcos, interceptados por aquéllos, ponen de manifiesto aquel ángulo oriental, en cuanto sea valorado.

Pero para que quede también claro el proceso de medir otras partes de la eclíptica, tómese de nuevo el círculo meridiano ABCD, el semicírculo del horizonte BED, el semicírculo de la eclíptica AEC, un grado de la cual se eleva en E. Nos proponemos hallar el ángulo AEB, determinar su medida teniendo en cuenta que cuatro rectos son CCCLX [grados]. Puesto que se da E, el grado del orto, se da también partiendo de lo anterior el grado que está en medio del cielo y el arco AE, junto con la altitud meridiana AB. Y, puesto que el ángulo ABE es recto, se da la razón de la cuerda del doble de AB como la cuerda de la mitad de la esfera [diámetro] es a la cuerda del doble del arco que mide el ángulo AEB: por lo tanto, se da también el ángulo AEB.



Pero si no hubiera sido dado el grado del orto, sino un grado de la mitad del cielo, que sea A, no por eso el ángulo del orto hubiera podido ser menos medido. Pues supuesto el polo en E, descríbase el cuadrante FGH de un círculo máximo, y sean completados los cuadrantes EAG, EBH. Puesto que se da la altitud meridiana AB, y AF la altitud restante del cuadrante, también se da el ángulo FAG según lo que antecede, y el ángulo FGA es recto, luego se da también el arco FG y el arco restante GH, que mide el ángulo del orto buscado.

De donde se concluye de qué modo, con respecto al grado que está en medio del cielo, se conoce el del orto, porque la cuerda del doble de GH es a la cuerda del doble

Tabla de las ascensiones de los signos en la revolución de una esfera recta

Eclíptica		*Ascensión*		*Un grado*		*Eclíptica*		*Ascensión*		*Un grado*	
Sig	*°*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Sig*	*°*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
	6	5	30	0	55		6	185	30	0	55
♈ ARIES	12	11	0	0	55	♎ LIBRA	12	191	0	0	55
	18	16	34	0	56		18	196	34	0	56
	24	22	10	0	56		24	202	10	0	56
	30	27	54	0	57		30	207	54	0	57
♉ TAURO	6	33	43	0	58	♏ ESCORPIO	6	213	43	0	58
	12	39	35	0	59		12	219	35	0	59
	18	45	32	1	0		18	225	32	1	0
	24	51	37	1	1		24	231	37	1	1
	30	57	48	1	2		30	237	48	1	2
♊ GÉMINIS	6	64	6	1	3	♐ SAGITARIO	6	244	6	1	3
	12	70	29	1	4		12	250	29	1	4
	18	76	57	1	5		18	256	57	1	5
	24	83	27	1	5		24	263	27	1	5
	30	90	0	1	5		30	270	0	1	5
♋ CÁNCER	6	96	33	1	5	♑ CAPRICORNIO	6	276	33	1	5
	12	103	3	1	5		12	283	3	1	5
	18	109	31	1	5		18	289	31	1	5
	24	115	54	1	4		24	295	54	1	4
	30	122	12	1	3		30	302	12	1	3
♌ LEO	6	128	23	1	2	♒ ACUARIO	6	308	23	1	2
	12	134	28	1	1		12	314	28	1	1
	18	140	25	1	0		18	320	25	1	0
	24	146	17	0	59		24	326	17	0	59
	30	152	6	0	58		30	332	6	0	58
♍ VIRGO	6	157	50	0	57	♓ PISCIS	6	337	50	0	57
	12	163	26	0	56		12	343	26	0	56
	18	169	0	0	56		18	349	0	0	56
	24	174	30	0	55		24	354	30	0	55
	30	180	0	0	55		30	360	0	0	55

Tabla de las ascensiones en una esfera oblicua

Eclíptica		*Elevación del polo*													
		39		*42*		*45*		*48*		*51*		*54*		*57*	
		Ascens.		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*	
Sig.	°	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
♈	6	3	34	3	20	3	6	2	50	2	32	2	12	1	49
	12	7	10	6	44	6	15	5	44	5	8	4	27	3	40
	18	10	50	10	10	9	27	8	39	7	47	6	44	5	34
	24	14	32	13	39	12	43	11	40	10	28	9	7	7	32
	30	18	26	17	21	16	11	14	51	13	26	11	40	9	40
♉	6	22	30	21	12	19	46	18	14	16	25	14	22	11	57
	12	26	39	25	10	23	32	21	42	19	38	17	13	14	23
	18	31	0	29	20	27	29	25	24	23	2	20	17	17	2
	24	35	38	33	47	31	43	29	25	26	47	23	42	20	2
	30	40	30	38	30	36	15	33	41	30	49	27	26	23	22
♊	6	45	39	43	31	41	7	38	23	35	15	31	34	27	7
	12	51	8	48	52	46	20	43	27	40	8	36	13	31	26
	18	56	56	54	35	51	56	48	56	45	28	41	22	36	20
	24	63	0	60	36	47	54	54	49	51	15	47	1	41	49
	30	69	25	66	59	64	16	61	10	57	34	53	28	48	2
♋	6	76	6	73	42	71	0	67	55	64	21	60	7	54	55
	12	83	2	80	41	78	2	75	2	71	34	67	28	62	26
	18	90	10	87	54	85	22	82	29	79	10	75	15	70	28
	24	97	27	95	19	92	55	90	11	87	3	83	22	78	55
	30	104	54	102	54	100	39	98	5	13	13	91	50	87	46
♌	6	112	24	110	33	108	30	106	11	103	33	100	28	96	48
	12	119	56	118	16	116	25	114	20	111	58	109	13	105	58
	18	127	29	126	0	124	23	122	32	120	28	118	3	115	13
	24	135	4	133	46	132	21	130	48	128	59	126	56	124	31
	30	142	38	141	33	140	23	139	3	137	38	135	52	133	52
♍	6	150	11	149	19	148	23	147	20	146	8	144	47	143	12
	12	157	41	157	1	156	19	155	29	154	38	153	36	153	24
	18	165	7	164	40	164	12	163	41	163	5	162	24	162	47
	24	172	34	172	21	172	6	171	51	171	33	171	12	170	49
	30	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0	180	0

(continuación)

Eclíptica		*Elevación del polo*													
		39		*42*		*45*		*48*		*51*		*54*		*57*	
		Ascens.		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*		*Ascens.*	
Sig.	°	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*	*Unid.*	*Min.*
♎	6	187	26	187	39	187	54	188	9	188	27	188	48	189	11
	12	194	53	195	19	195	48	196	19	196	55	197	36	198	23
	18	202	21	203	0	203	41	204	30	205	24	206	25	207	36
	24	209	49	210	41	211	37	212	40	213	52	215	13	216	48
	30	217	22	218	27	219	37	220	57	222	22	224	8	226	8
♏	6	224	56	226	14	227	38	229	12	231	1	233	4	235	29
	12	232	31	234	0	235	37	237	28	239	32	241	57	244	47
	18	240	4	241	44	243	35	245	40	248	2	250	47	254	2
	24	247	36	249	27	251	30	253	49	256	27	259	32	263	12
	30	255	6	257	6	259	21	261	52	264	47	268	10	272	14
♐	6	262	33	264	41	267	5	269	49	272	57	276	38	281	5
	12	269	50	272	6	274	38	277	31	280	50	284	45	289	32
	18	276	58	279	19	281	58	284	58	288	26	292	32	297	34
	24	283	54	286	18	289	0	292	5	295	39	299	53	305	5
	30	290	35	293	1	295	45	298	50	302	26	306	42	311	58
♑	6	297	0	299	24	302	6	305	11	308	45	312	59	318	11
	12	303	4	305	25	308	4	311	4	314	32	318	38	323	40
	18	308	52	311	8	313	40	316	33	319	52	323	47	328	34
	24	314	21	316	29	318	53	321	37	324	45	328	26	332	53
	30	319	30	321	30	323	45	326	19	329	11	332	34	336	38
♒	6	324	21	326	13	328	16	330	35	333	13	336	18	339	58
	12	329	0	330	40	332	31	334	36	336	58	339	43	342	58
	18	333	21	334	50	336	27	338	18	340	22	342	47	345	37
	24	337	30	338	48	340	3	341	46	343	35	345	38	348	3
	30	341	34	342	39	343	49	345	9	346	34	348	20	350	20
♓	6	345	29	346	21	237	17	348	20	349	32	350	53	352	28
	12	349	11	349	51	350	33	351	21	352	14	353	16	354	26
	18	352	50	353	16	353	45	354	16	354	52	355	33	356	20
	24	356	26	356	40	356	23	357	10	357	53	357	48	358	11
	30	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0	360	0

Tabla de los ángulos formados por la eclíptica con el horizonte

Eclíptica		*Elevación del polo* 39 *Ángulo*		42 *Ángulo*		45 *Ángulo*		48 *Ángulo*		51 *Ángulo*		54 *Ángulo*		57 *Ángulo*		*Eclíptica*	
Sig.	°	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	'	°	*Sig.*
	0	27	32	24	32	21	32	18	32	15	32	12	32	9	32	30	
♈	6	27	37	24	36	21	36	18	36	15	35	12	35	9	35	24	
	12	27	49	24	49	21	48	18	47	15	45	12	43	9	41	18	
	18	28	13	25	9	22	6	19	3	15	59	12	56	9	53	12	
	24	28	45	25	40	22	34	19	29	16	23	13	18	10	3	6	♓
	30	29	27	26	15	23	11	20	5	16	56	13	45	10	31	30	
♉	6	30	19	27	9	23	59	20	48	17	35	14	20	11	2	24	
	12	31	21	28	9	24	56	21	41	18	23	15	3	11	40	18	
	18	32	35	29	20	26	3	22	43	19	21	15	56	12	26	12	
	24	34	5	30	43	27	23	24	2	20	41	16	59	13	20	6	♒
	30	35	40	32	17	28	52	25	26	21	52	18	14	14	26	30	
♊	6	37	29	34	1	30	37	27	5	23	11	19	42	15	48	24	
	12	39	32	36	4	32	32	28	56	25	15	21	25	17	23	18	
	18	41	44	38	14	34	41	31	3	27	18	23	25	19	16	12	
	24	44	8	40	32	37	2	33	22	29	35	25	37	21	26	6	♑
	30	46	41	43	11	39	33	35	53	32	5	28	6	23	52	30	
♋	6	49	18	45	51	42	15	38	35	34	44	30	50	26	36	24	
	12	52	3	48	34	45	0	41	8	37	55	33	43	29	34	18	
	18	54	44	51	20	47	48	44	13	40	31	36	40	32	39	12	
	24	57	30	54	5	50	38	47	6	43	33	39	43	35	50	6	♐
	30	60	4	56	42	53	22	49	54	46	21	42	43	38	56	30	
♌	6	62	40	59	27	56	0	52	34	49	9	45	37	41	57	24	
	12	64	59	61	44	58	26	55	7	51	46	48	19	44	48	18	
	18	67	7	63	56	60	20	57	26	54	6	50	47	47	24	12	
	24	68	59	65	52	62	42	59	30	56	17	53	7	49	47	6	♏
	30	70	38	67	27	64	18	61	17	58	9	54	58	52	38	30	
♍	6	72	0	68	63	65	51	62	46	59	37	56	27	53	16	24	
	12	73	4	70	2	66	59	63	56	60	53	57	50	54	46	18	
	18	73	51	70	50	67	49	64	48	61	46	58	45	55	44	12	
	24	74	19	71	20	68	20	65	19	62	18	59	17	56	16	6	
	30	74	28	71	28	68	28	65	28	62	28	59	29	56	28	0	♎

de AB, como el diámetro es a la cuerda del doble de AE, según sucede en los triángulos esféricos.

Sobre estas cosas también añadiremos tres ejemplos de tablas. La primera será la de las ascensiones en la esfera recta, tomando el principio de Aries y el incremento de las seis partes de la eclíptica. La segunda será la de las ascensiones en la esfera oblicua, se procederá de un modo semejante cada seis grados desde el paralelo cuyo polo tiene una elevación de XXXIX grados, hasta el paralelo que tiene una elevación de LVII grados, señalando los incrementos medios de tres en tres grados. La restante trata de los ángulos del horizonte y procede de seis en seis grados bajo las mismas siete columnas. Y todo ello según la mínima oblicuidad de la eclíptica de XXIII grados, XXVIII minutos, con lo que casi se está de acuerdo en nuestro siglo.

11. SOBRE EL USO DE ESTAS TABLAS

De lo ya demostrado se deduce el uso de estas tablas. Puesto que, conocido un grado del Sol, si tomáramos la ascensión recta y a ésta, por cada hora igual tomada desde mediodía, le añadiéramos quince «tempora», desechados los CCCLX grados del círculo entero si excedieran de ellos, lo que resulta mostrará el grado de la ascensión recta de la eclíptica que corresponde a la hora propuesta en medio del cielo. De igual modo, si hicieras lo mismo respecto de la ascensión oblicua de tu región, tendrás el grado del orto de la eclíptica para la hora tomada a partir de la salida del Sol. En cualquiera de las estrellas que están fuera del círculo de los signos [zodíaco], de las cuales la ascensión recta se ha fijado (como demostramos más arriba), se dan por estas tablas los grados de la eclíptica que con ellas están en medio del cielo, a través de la misma ascensión recta a partir del principio de Aries, y también se da, a través de la ascensión oblicua de las mismas, el grado de la eclíptica que nace con ellas, además de que se muestran en las distintas zonas de las tablas las ascensiones y grados de la eclíptica. De igual modo, pero siempre por el lugar opuesto, se operará respecto del ocaso. Además, si a la ascensión recta, que está en medio del cielo, se añade un cuadrante de círculo, lo que de allí se calcula es la ascensión oblicua del orto. Por lo cual, a partir del grado de la mitad del cielo se da también el del orto, y al revés.

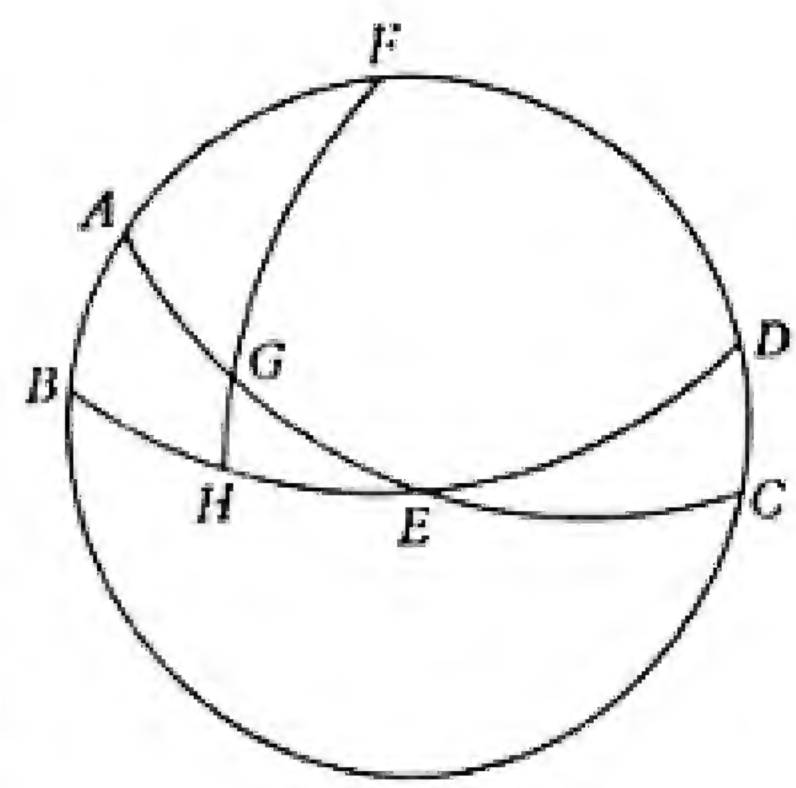
Sigue la tabla de los ángulos de la eclíptica con el horizonte, que son tomados por medio del grado del orto de la eclíptica; por los cuales se entiende a cuánto se eleva en el horizonte el nonagésimo grado de la eclíptica, lo que es necesario saber sobre todo en los eclipses solares. (Véanse las páginas 94-97.)

12. ACERCA DE LOS ÁNGULOS Y DE LOS ARCOS DE LOS CÍRCULOS QUE SE TRAZAN DESDE LOS POLOS DEL HORIZONTE AL CÍRCULO DE LA ECLÍPTICA

Es preciso que expongamos la relación existente entre los ángulos y los arcos formados por la intersección de la eclíptica con los [arcos] que tienen el vértice en el horizonte; en los casos en que la altitud está por encima del horizonte. Aunque más arriba ya se hizo una exposición acerca de la altitud meridiana del Sol, o de cualquier grado de la

eclíptica que está en medio del cielo, y del ángulo de sección con el meridiano, siendo el círculo del meridiano uno de los que también pasan a través del vértice del horizonte. Ya precedió también el razonamiento acerca del ángulo del orto, cuyo complementario es aquel al que el cuadrante del círculo comprende por el vértice del horizonte con el orto de la eclíptica.

Repetida la figura anterior, queda por tanto examinar las secciones medias, es decir, las intersecciones del círculo meridiano con los semicírculos de la eclíptica y del horizonte; tómese cualquier punto de la eclíptica entre el mediodía y el orto o el ocaso, por ejemplo sea éste G, por el cual desde el polo del horizonte F descienda el cuadrante del círculo FGH. Por lo tanto, en toda esa hora se conoce AGE, el arco de la eclíptica entre el meridiano y el horizonte, y AG por hipótesis; del mismo modo, también se da AF, a causa de ser conocida la altitud meridiana AB con el ángulo meridiano FAG, también se da FG por lo demostrado acerca de los triángulos esféricos, y el ángulo restante GH, altitud del punto G, con el ángulo FGA: lo que buscábamos.



Todo eso, acerca de los ángulos y secciones con respecto a la eclíptica, lo tomamos en síntesis de Ptolomeo, refiriéndonos en general a la tradición de los triángulos esféricos. Con lo que, si alguien quisiera ejercitarse, podría encontrar por sí mismo muchas más mediciones útiles además de estas que hemos utilizado como ejemplo.

13. DEL ORTO Y OCASO DE LOS ASTROS

También parece depender de la revolución diaria el orto y el ocaso de los astros, no sólo el simple orto y ocaso de los que acabamos de hablar, sino de qué manera se produce lo matutino y lo vespertino; lo cual, aunque acontece con el concurso de la revolución anual, sin embargo se hablará de ello aquí con más exactitud.

Los matemáticos antiguos separan los verdaderos de los aparentes. Entre los verdaderos está la matutina salida del astro, cuando emerge al mismo tiempo el Sol, en cambio se produce un ocaso matutino cuando la estrella se pone al salir el Sol, porque todo el tiempo que media se le llamaba matutino. Por el contrario, el orto vespertino se produce cuando la estrella sale al ponerse el Sol, en cambio ocaso vespertino cuando el astro se pone al ponerse el Sol; pues también al tiempo que media se le llama vespertino, de la misma manera que queda establecido lo que sucede durante el día y aquello que sucede durante la noche. Entre los aparentes, el orto del astro matutino es cuando, en el alba y antes de la salida del Sol, se presenta para emerger y empieza a aparecer, pero ocaso matutino cuando la estrella parece ocultarse muy pronto, antes de que salga el Sol. El orto vespertino se produce cuando, en el crepúsculo, parece que va a salir primero el astro, y el ocaso vespertino cuando algún tiempo después de la puesta del Sol, el astro ya deja de aparecer, y con la llegada del Sol el astro se oculta, hasta que en la salida matutina aparezcan en el orden anterior.

Todo esto acontece lo mismo con las estrellas fijas, incluso también con Saturno, Júpiter y Marte. En cambio, Venus y Mercurio realizan de otra manera el orto y el oca-

so; en efecto, no anticipan [su ocaso] con la llegada del Sol como acontece con aquellos planetas [Saturno, Júpiter, Marte], ni son descubiertos con el alejamiento de éste [el Sol], sino que anticipándose se mezclan con el fulgor del Sol y se desvanecen. Aquellos, al hacer la salida vespertina y matutina no se obscurecen durante algún tiempo, de manera que pasan la noche casi con su propia luz; y éstos [Venus y Mercurio] se ocultan completamente desde el ocaso hasta el orto y no pueden ser vistos. Hay también otra diferencia, en aquéllos el orto y el ocaso matutinos verdaderos son anteriores a los aparentes, los vespertinos posteriores, además de que por la mañana preceden a la salida del Sol y por la tarde siguen a su ocaso. En cambio, en los planetas inferiores, la salida matutina y vespertina aparentes son posteriores a las verdaderas, pero los ocasos son anteriores.

La manera según la cual se determinan [el orto y el ocaso] puede comprenderse por lo que se ha dicho más arriba al exponer la ascensión oblicua de cualquier astro que tenga una posición conocida y en coincidencia con qué grado de la eclíptica sale o se pone; si entonces apareciera el Sol en ese grado o en su contrario, el astro realizará entonces un orto o un ocaso matutino o vespertino verdadero. De estos se diferencian los aparentes según la claridad y magnitud de cada estrella, de tal modo que las que brillan con mayor luz están menos tiempo obscurecidas por los rayos solares que aquellas que son más oscuras. Y los límites de aparición y ocultación se toman en arcos sub-horizonte de los círculos que pasan por los polos del horizonte, entre el mismo horizonte y el Sol. En las estrellas fijas de primera magnitud hay aproximadamente XII grados [de límite], para Saturno XI, para Júpiter X, para Marte XI y medio, para Venus V, para Mercurio X. Pero en todo [este período], en el que lo que queda de luz diurna cede ante la noche, que abarca el crepúsculo o el alba, hay XVIII grados del ya mencionado círculo, y cuando el Sol ha atravesado tales grados, también las estrellas menores empiezan a aparecer; y precisamente con esta distancia, algunos [astrónomos] toman un paralelo trazado por debajo del horizonte, al cual, mientras el Sol lo toca, dicen que amanece o que termina la noche. Así pues, sabiendo en qué grado de la eclíptica el astro sale o se pone, y conociendo en el mismo punto el ángulo de sección de la eclíptica con el horizonte, si entonces hubiéramos encontrado también entre el grado del orto y el Sol, tantos grados de la eclíptica cuántos sean suficientes y que conciernen a la profundidad del Sol en relación al horizonte, según los límites prescritos del astro propuesto, nosotros podremos decir que se produce su primera salida u ocultación. Pero lo que expusimos en la precedente demostración sobre la altitud del Sol respecto a la Tierra, conviene también en todo su descenso bajo la Tierra y no difiere de la otra posición; de qué modo los [astros] que se ponen en el hemisferio aparente, nacen en el oculto, y que son cosas inversas, es fácil de entender. Acerca del orto y ocaso de los astros y del movimiento cotidiano del globo terrestre es suficiente con lo dicho.

14. SOBRE LA BÚSQUEDA DE LA POSICIÓN DE LAS ESTRELLAS Y LA DESCRIPCIÓN CANÓNICA DE LAS ESTRELLAS FIJAS

Después de haber expuesto el movimiento diario del globo terrestre y sus consecuencias, ahora debían seguir las demostraciones del circuito anual. Pero, puesto que algu-

nos matemáticos antiguos juzgaron que los fenómenos de las estrellas no errantes antecedían, como el principio de este arte, juzgamos que se debía seguir esta decisión, porque entre los principios y las hipótesis habíamos supuesto que la esfera de las estrellas no errantes era inmóvil, alrededor de tal decisión se acumulaban los errores, de todos los astros que se mueven.

Pero que nadie se admire porque hayamos aceptado este orden, habiendo estimado Ptolomeo en su *Almagesto* que no podía realizarse la explicación de las estrellas fijas, si antes no precedían los conocimientos [de las posiciones] sobre el Sol y la Luna, y por tanto lo que atañe a las estrellas fijas pensó diferirlo a aquellos [conocimientos]; nosotros juzgamos que hay que oponerse a este juicio. Porque si entiendes los cálculos sobre los que se deduce el movimiento de la Luna y el Sol, la idea quizá se mantendría. En efecto, también el geómetra Menelao determinó muchas estrellas y sus posiciones por medio de cálculos sobre las conjunciones lunares. Pero lo haremos mucho mejor si con la ayuda de instrumentos determinamos cualquier astro a través de las posiciones diligentemente examinadas del Sol y de la Luna, tal como mostraremos. También nos parece inútil el intento de aquellos que pensaron que podía delimitarse la magnitud del año solar a partir de los equinoccios o de los solsticios, y no a partir de las estrellas fijas; en lo cual nunca pudieron estar de acuerdo con nosotros, de tal manera que en ninguna parte la discrepancia fuera mayor. Esto lo había advertido Ptolomeo, quien habiendo considerado atentamente el año solar en su tiempo, no sin sospecha de error que con el tiempo pudiera manifestarse, aconsejó a la posterioridad que se escrutase más tarde la ulterior certeza de este asunto. Así pues, nos pareció que es preciso saber, tal como mostramos en este libro, de qué modo, con la ayuda de instrumentos, se toman las posiciones del Sol y de la Luna, esto es, cuánto distan del equinoccio primaveral o de otros puntos cardinales del mundo, lo que nos proporcionará una serie de comodidades para escrutar los otros astros, con lo que incluso expondremos la esfera de las estrellas fijas entretejida de constelaciones y su representación.

Pero con qué instrumentos se podría tomar la distancia de los trópicos, la oblicuidad de la eclíptica y la inclinación de la esfera o la altitud del polo del ecuador, se expuso anteriormente. Del mismo modo podemos tomar cualquier otra altitud del Sol de mediodía. Cuál sea la altitud, según su diferencia con respecto a la inclinación de la esfera, nos mostrará cuánto se inclina el Sol a partir del círculo equinoccial, y a través de esta declinación, se manifestará la posición del Sol al mediodía, tomada desde el equinoccio o desde el solsticio. El Sol parece atravesar aproximadamente un solo grado en el espacio de XXIIII horas; II minutos y medio pasan por cada hora. De donde, en cualquier hora determinada se deducirá fácilmente su posición.

Pero para observar la posición de la Luna y de las estrellas fijas hay otro instrumento, al que Ptolomeo llama astrolabio. Se fabrican dos órbitas circulares, o sea, los márgenes cuadriláteros de las órbitas, de tal modo que las superficies de lados o caras planos, la cóncava y la convexa, estén orientadas hacia los ángulos rectos, iguales en todo y semejantes, que concuerden en magnitud, por supuesto que por un tamaño demasiado pequeño no se hagan menos manejables, teniendo en cuenta que la amplitud contribuye mejor que la pequeñez para dividirlo en grados. La anchura y su espesor sean como mínimo la trigésima parte del diámetro. Conéctense y pónganse en contacto juntos entre sí los ángulos rectos, coincidiendo entre sí los cóncavos y los convexos, como en la redondez de un solo globo. Pero de ellos, uno obtenga el puesto de círculo de los signos, el otro el del que pasa por ambos polos (los llamaré equinoccial y de la eclípti-

ca). Aquel círculo de los signos hay que dividirlo en partes iguales, en CCCLX a lo largo de los lados, según se suele hacer; los cuales se subdividirán a su vez según la capacidad del instrumento. También en el otro círculo (medidos los cuadrantes desde la eclíptica) señálense los polos de la propia eclíptica, y tomada la distancia desde éstos, según el módulo de oblicuidad de la eclíptica, anótense también los polos del círculo ecuatorial.

Dispuestas así estas cosas, prepárense otras dos órbitas, construidas exactamente por los mismos polos de la eclíptica, en los cuales se moverán, una exterior y otra interior. Que éstos tengan igual grosor entre las dos superficies planas, pero la anchura de sus caras sea semejante a aquéllos; colocados de tal modo que la superficie cóncava del mayor toque la convexa, y la convexidad del menor toque por todas partes la cóncava de la eclíptica, de modo que no se impida su giro, pero que dejen fácilmente pasar a la eclíptica con su meridiano, y a la vez libremente entre sí. Perforaremos con habilidad estas órbitas circulares en los polos de la eclíptica según su diámetro y colocaremos unos ejes, con los que se conecten y se puedan mover. Divídase también la órbita interior en CCCLX partes iguales, de manera que en cada cuadrante salgan noventa hacia los polos.

Además, en la cavidad de éste ha de ser colocado otro círculo, y este quinto círculo susceptible también de virar en el mismo plano, a cuyas superficies planas se fijan unos instrumentos [agujas con pínulas] que tengan posibilidad de pasar de una a otra parte, de acuerdo con el diámetro, y reflectores o espejillos, por donde la luz de la estrella pueda entrar y salir, tal como sucede en las dioptras, por el mismo diámetro de la órbita circular, al que también se han de ajustar ciertos resaltes o indicadores de números para observar las latitudes del círculo continente. Ha de añadirse un sexto círculo, que lo rodee por completo y sostenga el astrolabio suspendido en puntos de sujeción de los polos ecuatoriales, colocado en alguna columnilla y sostenido por ella, y levantado perpendicularmente al plano del horizonte; ajustados también los polos según la inclinación de la esfera, de modo que tenga un meridiano similar al natural y con respecto a éste muévase lo menos posible.

Preparado así el instrumento, cuando queramos saber la posición de alguna estrella, hacia el atardecer, o sea, cuando el Sol está a punto de irse, cuando ya tenemos ante la vista la Luna, ajustaremos el círculo exterior al grado de la eclíptica, en el que habremos determinado la posición del Sol en ese tiempo, conocido por los métodos precedentes, y giraremos la sección de las órbitas hacia el Sol, hasta que cada uno de ellos, me refiero a la eclíptica y a aquel círculo exterior que pasa a través de sus polos, se oscurezcan a sí mismos.[1] Entonces giramos también el círculo interior hacia la Luna, y puesta la mirada en el plano de ella, donde veamos a la Luna bisecada desde el mismo plano o desde el opuesto, anotaremos la situación en la eclíptica del instrumento; ésta será, pues, la situación de la Luna vista según la longitud. Porque sin ella no habría modo de captar las posiciones de las estrellas, puesto que entre todas es la única partícipe del día y de la noche. Después, al llegar la noche, cuando puede ser vista la estrella cuya posición buscamos, ajustaremos la órbita exterior a la posición de la Luna, por la cual, con respecto a la Luna, colocamos la posición del astrolabio, tal como hicimos con el Sol. Entonces viramos también el círculo interior hacia la estrella, hasta que ésta parezca tomar contacto con la parte plana de la órbita, y es vista a través de los espejillos, que están en el pequeño círculo interior. Y así tendremos averiguada la longitud con la latitud de la estrella. Mientras se hace todo esto, examínese con la mirada qué

1. Es decir, hasta que las sombras se cortan como dos rectas perpendiculares entre sí.

grado de la eclíptica está en mitad del cielo, y a qué horas se ha llevado a cabo el experimento, y que conste en claro.[1]

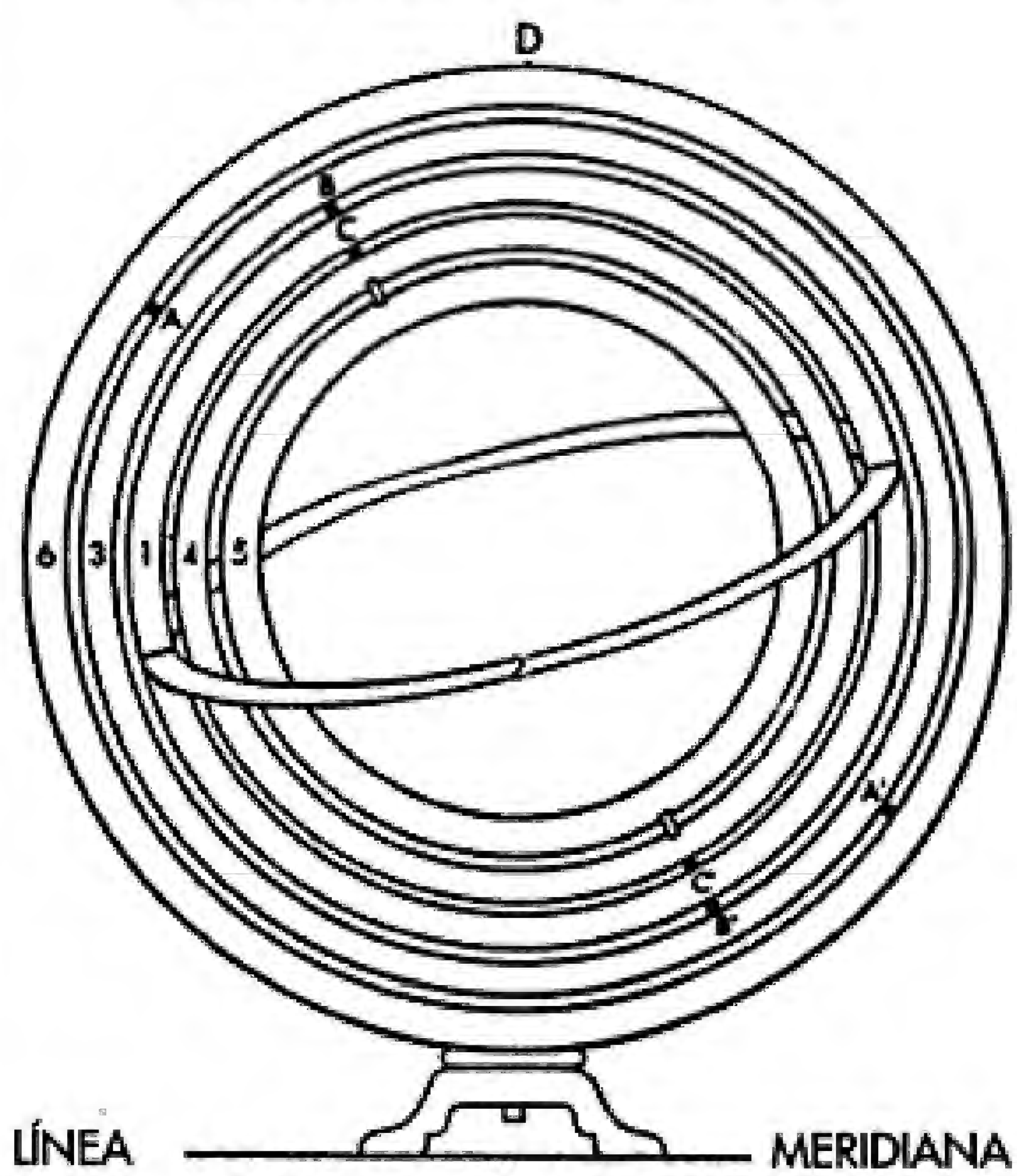
Por ejemplo, Ptolomeo, en el año segundo del emperador Antonino Pío, en el noveno día de Pharmuthi, octavo mes de los egipcios, queriendo observar en Alejandría, hacia el ocaso del Sol, la posición de la estrella que se llama Basiliscos o Régulo en el pecho de Leo, dispuesto ya el astrolabio hacia el ocaso del Sol, pasadas cinco horas equinocciales desde mediodía, cuando el Sol se encontraba a III grados y una veinticuatroava parte de Piscis, al mover el círculo interior encuentra que la Luna sigue después [está al este] del Sol a XCII grados y un octavo; por lo que apareció entonces la posición de la Luna a V grados y una sexta parte de Géminis. Y después de media hora,

1. Leyenda:
1. Círculo a través de los polos de la eclíptica
2. Eclíptica
3. Círculo exterior
4. Círculo interior
5. Círculo menor
6. Círculo meridiano
A y A^1. Polos del ecuador
BCC^1B^1 Eje de la eclíptica
D Zenit, o polo del horizonte

El astrolabio está construido a imagen del firmamento ptolemaico, o como un «universo en miniatura». Consiguientemente, el funcionamiento del astrolabio es una imitación a escala reducida de la revolución de los cielos.

El astrolabio se dispone con el círculo meridiano (6) fijado en la línea meridiana y con los polos norte y sur del ecuador (A y A^1) apuntando hacia los polos celestes de encima y debajo del horizonte, de manera que el meridiano no cambie durante el curso de la revolución diaria. Los grados de la eclíptica celeste están indicados en el círculo eclíptico (2), con los solsticios o equinoccios en las intersecciones de la eclíptica (2) y el círculo que pasa por los polos de la eclíptica (1). El círculo exterior (3) se hace girar hasta el punto de la eclíptica donde se calcula que está el sol, y a continuación la intersección del círculo exterior y de la eclíptica se hace girar hacia el mismo Sol, hasta que cada círculo produce una sombra rectilínea que corta perpendicularmente la otra sombra. Ahora, a medida que el círculo exterior gira alrededor del eje del ecuador hacia el eje de la eclíptica, el círculo que pasa por los polos de la eclíptica, el círculo interior y el círculo menor giran alrededor del eje del ecuador, y a medida que el polo de la eclíptica gira alrededor del polo del ecuador durante la revolución diaria; el giro hacia el Sol de la intersección de ambos círculos sirve para dar al giro anual y al giro diario del Sol la proporción adecuada el uno respecto del otro; y la sombra cruciforme indica que la eclíptica de madera ocupa en el astrolabio la posición relativa que la eclíptica celeste ocupa en este momento de la revolución diaria. El círculo interior (4) puede ser girado ahora hacia la Luna para marcar sobre la eclíptica la longitud lunar, y el círculo menor (5) puede ser rotado en el plano del círculo interior, para marcar la latitud lunar en el círculo interior graduado.

ASTROLABIO DE COPÉRNICO



cuando se cumplía la sexta a partir de mediodía y la estrella ya empezaba a aparecer, estando en mitad del cielo el cuarto grado de Géminis, viró el círculo exterior del instrumento hacia la ya tomada posición de la Luna. Continuando con el círculo interior, tomó la distancia de la estrella desde la Luna en LVII grados y una décima parte al este de los signos. Así pues, puesto que la Luna se descubría a partir del Sol poniente, como se ha dicho, a los XCII grados y una octava, los cuales determinan la posición de la Luna a V grados y un sexto de Géminis, pero era correcto que en la mitad del espacio de una hora [media hora] la Luna se había movido a través de un cuadrante de un solo grado [un cuarto de grado], puesto que una porción horaria [una hora] en el movimiento lunar continuó más o menos medio grado, pero a causa del paralaje en ese momento sustractivo de la Luna debía haber sido un poco menor de un cuadrante, lo que fijó aproximadamente como una doceava parte: por lo tanto, la Luna había estado a V grados y un tercio de Géminis. Pero, cuando hayamos tratado acerca de las conmutaciones [paralajes] lunares, aparecerá que no fue tanta la diferencia: de modo que puede quedar claro que la posición vista de la Luna excedía en más de un tercio o apenas menos de dos quintos los cinco grados de Géminis; añadidos a los cuales los LVII grados con una décima parte concluyen la posición de la estrella a II grados y medio de Leo, distante del solsticio de verano del Sol en XXXII grados y medio, con una latitud boreal de una sexta parte de grado. Ésta era la posición de Basiliscos, a través de la cual estaba abierta la vía incluso para las demás estrellas no errantes. Esta observación de Ptolomeo fue hecha según el calendario romano en el año CXXXIX de Cristo, día XXIIII de febrero, en el año primero de la Olimpíada CCXXIX.

Pero aquel hombre, el más eminente de los matemáticos, anotó tantas posiciones como cada una de las estrellas había obtenido en ese tiempo del equinoccio de primavera, y expuso [catalogó] las constelaciones de animales celestes. Con lo que no ayudó poco a este estudio nuestro y nos relevó de una labor bastante ardua, de modo que los que juzgamos que no son las posiciones de las estrellas las que cambian con el tiempo con respecto a los equinoccios, sino los equinoccios los que hay que referir a la esfera de las estrellas fijas, fácilmente podríamos deducir la descripción de los astros según cualquier otro principio inmutable. Así como pareció bien empezar desde Aries, como primer signo, y desde su primera estrella, la que está en su cabeza, así la misma configuración permanece siempre y absolutamente para las estrellas que brillan como fijas y en perpetua coherencia una vez captado su lugar. Están divididas por la admirable preocupación y maestría de los antiguos en XLVIII figuras, exceptuadas aquellas a las que siempre separaba el círculo de las ocultas desde el cuarto clima, aproximadamente por Rodas, y así quedaron estrellas informes [fuera de las figuras, de las constelaciones], como desconocidas para aquéllos. Y no por otra causa fueron las estrellas representadas en imágenes, según la opinión de Theón el Joven, en la exposición Aratea, a no ser para que tan gran multitud de ellas se distinguiera por partes, e individualmente pudieran ser designadas con algunas denominaciones, costumbre bastante antigua, puesto que leemos incluso en Hesíodo y Homero que habían sido ya nombradas Pleiades, Hyadas, Arcturo, Orión. En consecuencia, en la descripción de éstas según la longitud, no utilizaremos doceavas partes [«dodekatemorías»], que se deducen de los equinoccios y de los giros, sino el simple y acostumbrado número de grados, en lo restante seguiremos a Ptolomeo, con pocas excepciones, las que hayamos descubierto como alteradas o que son de otra manera. En el libro siguiente enseñaremos hasta qué punto queda clara la distancia de ellas a aquellos puntos cardinales [puntos equinoccios...].

Descripción en tablas de los signos y las estrellas y en primer lugar las que pertenecen a la región septentrional

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
OSA MENOR O COLA DE PERRO						
En el extremo de la cola.	53	30	N.	66	0	3
Al este en la cola.	55	50	N.	70	0	4
En el comienzo de la cola.	69	20	N.	74	0	4
La que está más al sur en el cuadrángulo al oeste.	83	0	N.	75	20	4
La del mismo lado que está más al norte.	87	0	N.	77	40	4
La más al sur de las que están en el lado siguiente.	100	30	N.	72	40	2
La del mismo lado, que está más al norte.	109	30	N.	74	50	2
Siete estrellas de las que 2 son de segunda magnitud, 1 de tercera, 4 de cuarta.						
Y una no agrupada que está más al sur cerca de Cola de Perro en el lado siguiente en línea directa.	103	20	N.	71	10	4
OSA MAYOR A LA QUE LLAMAN «HÉLICE»						
La que está en el rostro.	78	40	N.	39	50	4
La que está al oeste en los ojos.	79	10	N.	43	0	5
Al este de ésta.	79	40	N.	43	0	5
De las dos que están en la frente la del oeste.	79	30	N.	47	10	5
La del este en la frente.	81	0	N.	47	0	5
La del oeste en la oreja derecha.	81	30	N.	50	30	5
De las dos que hay en el cuello, la del oeste.	85	50	N.	43	50	4
La del este.	92	50	N.	44	20	4
De las dos que hay en el pecho, la que está al norte.	94	20	N.	44	0	4
La que está más al sur.	89	20	N.	42	0	3
La que está en la rodilla izquierda anterior	89	50	N.	35	0	3
De las 2 que hay en el pie izquierdo, la que está al norte.	89	50	N.	29	0	3
La que está más al sur.	88	40	N.	28	30	3
En la rodilla izquierda primera.	89	0	N.	36	0	4
La que está bajo la misma rodilla.	101	10	N.	33	30	4
La que está en el hombro.	104	0	N.	49	0	2
La que está en el vientre.	105	30	N.	44	30	2
La que está en el comienzo de la cola.	116	30	N.	51	0	3
En la pierna izquierda posterior.	117	20	N.	46	30	2
La del oeste de las 2 que hay en el pie izquierdo posterior.	106	0	N.	29	38	3
La del este a ésta.	107	30	N.	28	15	3
La que está en la cavidad izquierda.	115	0	N.	35	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del norte de las dos que hay en el pie derecho posterior.	123	10	N.	25	50	3
La que está al sur.	123	40	N.	25	0	3
La 1.ª de las tres que hay en la cola desde su comienzo.	125	30	N.	53	30	2
La del medio de ellas.	131	20	N.	55	40	2
La última y en el extremo de la cola.	143	10	N.	54	0	2

27 estrellas de las que 6 son de 2.ª magnitud, 8 de 3.ª, 8 de 4.ª y 5 de 5.ª.

Estrellas no agrupadas que están alrededor de la «Hélice».						
Una hacia el sur, partiendo de la cola.	141	10	N.	39	45	3
Una más oscura y que precede a la anterior.	133	30	N.	41	20	5
Entre los pies anteriores de Osa y la cabeza de Leo.	98	20	N.	17	15	4
La más al norte, partiendo de ésta.	96	40	N.	19	10	4
La última de las tres oscuras.	99	30	N.	20	0	oscura
La del oeste a ésta.	95	30	N.	22	45	oscura
La que está más al oeste.	94	30	N.	23	15	oscura
La que está entre los pies anteriores y Géminis.	100	20	N.	22	15	oscura

De las 8 no agrupadas: 1 de 3.ª magnitud, 2 de 4.ª, 1 de 5.ª, 4 oscuras.

DRAGÓN

La que está en la lengua.	200	0	N.	76	30	4
En la boca.	215	10	N.	78	30	4 mayor
Sobre el ojo.	216	30	N.	75	40	3
En la mejilla.	229	40	N.	75	20	4
Sobre la cabeza.	233	30	N.	75	30	3
La que está al norte en la inflexión del cuello.	258	40	N.	82	20	4
De esas mismas la que está al sur.	295	50	N.	78	15	4
La que está entre ellas.	262	10	N.	80	20	4
La más al este en la segunda vuelta.	282	50	N.	81	10	4
La del sur del lado del cuadrilátero del oeste.	331	20	N.	81	40	5
La del norte del mismo lado.	343	50	N.	80	15	4
Del lado siguiente, la del norte.	1	0	N.	78	50	4
Del mismo lado, la del sur.	346	10	N.	77	50	4
La del sur del triángulo de la 3.ª vuelta.	4	0	N.	80	30	4
De las otras del rectángulo, la del oeste.	15	0	N.	81	40	5
La del este.	19	30	N.	80	15	5
De las 3 del triángulo, la del oeste.	66	20	N.	83	30	4
La del sur de las otras del mismo triángulo.	43	40	N.	83	30	4
La que está más al norte que las anteriores.	35	10	N.	84	50	4
De las 2 pequeñas, la que está al este del triángulo.	200	0	N.	87	30	6

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del oeste de ellas.	195	0	N.	86	50	6
De las 3 en línea recta, la del sur.	152	30	N.	81	15	5
La del medio de las 3.	152	50	N.	83	0	5
De ellas la que está más al norte.	151	0	N.	84	50	3
De las 2 que después de éstas están hacia el ocaso, la que está más al norte.	153	20	N.	78	0	3
Más al sur.	156	30	N.	74	40	4 mayor
De ahí, hacia el ocaso, en la vuelta de la cola.	156	0	N.	70	0	3
De las dos más distantes, la del oeste.	120	40	N.	64	64	4
La del este a ésa.	124	30	N.	65	30	3
La del este en la cola.	192	30	N.	61	15	3
En la punta (extremo) de la cola.	186	30	N.	56	15	3

31 estrellas, 8 de 3.ª magnitud, 16 de 4.ª, 5 de 5.ª y 2 de 6.ª.

CEFEO

En el pie derecho.	28	40	N.	75	40	4
En el pie izquierdo.	26	20	N.	64	15	4
En el lado derecho bajo el cinturón.	0	40	N.	71	10	4
La que está por encima del hombro derecho.	340	0	N.	69	0	3
La que toca la articulación derecha de la pierna.	332	40	N.	72	0	4
La del este a ésta, tocando la pierna.	333	20	N.	74	0	4
La que está en el pecho.	352	0	N.	65	30	5
En el brazo izquierdo.	1	0	N.	62	30	4 mayor
De las tres que están en la tiara, la austral.	339	40	N.	60	15	5
La del medio.	340	40	N.	61	15	4
La del norte de las tres.	342	20	N.	61	30	5

11 estrellas, 1 de 3.ª magnitud, 7 de 4.ª, 3 de 5.ª.

De las dos no agrupadas, la del oeste a la tiara.	337	0	N.	64	0	5
La del este.	344	40	N.	59	30	4

BOYERO O ARTOPHYLACIS

La del oeste de las tres que hay en la mano derecha.	145	40	N.	58	40	5
La del medio de las tres, la más al sur.	147	30	N.	58	20	5
La del este de las tres.	149	0	N.	60	10	5
La que está en la articulación de la pierna izquierda.	143	0	N.	54	40	5
En el hombro izquierdo.	163	0	N.	49	0	3
En la cabeza.	170	0	N.	53	50	4 mayor
En el hombro derecho.	179	0	N.	48	40	4
La más al sur de los dos que hay en la túnica.	179	0	N.	53	15	4
La que está más al norte en el extremo de la túnica.	178	20	N.	57	30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La que está el norte de las dos que hay bajo el hombro en la flecha.	181	0	N.	46	10	4 mayor
La más al sur de ellas.	181	50	N.	45	30	5
En el extremo de la mano derecha.	181	35	N.	41	20	5
La del oeste de las dos que hay en la palma de la mano.	180	0	N.	41	40	5
La del este.	180	20	N.	42	30	5
En el extremo de la manga de la túnica.	181	0	N.	40	20	5
En la pierna derecha.	173	20	N.	40	15	3
De las dos que hay en el cinturón, la del este.	169	0	N.	41	40	4
La del oeste.	168	20	N.	42	10	4 mayor
La que está en el talón derecho.	178	40	N.	28	0	3
De las tres que hay en la pierna izquierda, la del norte.	164	40	N.	28	0	3
La del medio de las tres.	163	50	N.	26	30	4
La más al sur de ellas.	164	50	N.	25	0	4
22 estrellas, de las que 4 son de magnitud 3.ª, 9 de 4.ª y 9 de 5.ª.						
1 no agrupada, entre las piernas, a la que llaman Arturo.	170	20	N.	31	30	1
CORONA BOREAL						
La que brilla en la corona.	188	0	N.	41	30	2 mayor
La más al oeste de todas.	185	0	N.	46	10	4 mayor
La que está al este del norte.	185	10	N.	48	0	5
Al este más al norte.	193	0	N.	50	30	6
Al este de la que brille desde el sur.	191	30	N.	44	45	4
Al este, más cerca.	190	30	N.	44	50	4
Al este, la que le sigue más lejos.	194	40	N.	46	10	4
La más al este de todas en la corona.	195	0	N.	49	20	4
8 estrellas, de las que 1 es de magnitud 2.ª, 5 de 4.ª, 1 de 5.ª, 1 de 6.ª.						
EL ARRODILLADO O HÉRCULES						
En la cabeza.	221	0	N.	37	30	3
En la axila derecha.	207	0	N.	43	0	3
En el brazo derecho.	205	0	N.	40	10	3
En el costado derecho.	201	20	N.	37	10	4
En el hombro izquierdo.	220	0	N.	48	0	3
En el brazo izquierdo.	225	20	N.	49	30	4 mayor
En el costado izquierdo.	231	0	N.	42	0	4
Una de las tres que hay en la izquierda.	238	50	N.	52	50	4 mayor
De las dos que quedan, la del norte.	235	0	N.	54	0	4 mayor
La más al sur.	234	50	N.	53	0	4
En el lado derecho.	207	10	N.	56	10	3
En el lado izquierdo.	213	30	N.	53	30	4
En la nalga izquierda.	213	20	N.	56	10	5
En la salida de la misma pierna.	214	30	N.	58	30	5
De las tres que hay en la pierna izquierda, la del oeste.	217	20	N.	59	50	3
La del este a ésta.	218	40	N.	60	20	4
La tercera del este.	219	40	N.	61	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En la rodilla izquierda.	237	10	N.	61	0	4
En la rabadilla.	225	30	N.	69	20	4
De las tres que hay en el pie izquierdo, la del oeste.	188	40	N.	70	15	6
La del medio de ellas.	220	10	N.	71	15	6
La del este de las tres.	223	0	N.	72	0	6
En la salida de la pierna derecha.	207	0	N.	60	15	4 mayor
La más al norte de la misma pierna.	198	50	N.	63	0	4
En la rodilla derecha.	189	0	N.	65	30	4 mayor
La más al sur de las dos que hay bajo la misma rodilla.	186	40	N.	63	40	4
La que está más al norte.	183	30	N.	64	15	4
En la tibia derecha.	184	30	N.	60	0	4
En el extremo del pie derecho, la misma que está en el extremo de la túnica de Boyero.	178	20	N.	57	30	4
Además de ésta, 28 estrellas, 6 de 3.ª magnitud, 17 de 4.ª, 2 de 5.ª, 3 de 6.ª.						
Una, no agrupada, la más al sur a partir del brazo derecho.	206	0	N.	38	10	5
LIRA						
Una brillante, a la que llaman Lyra o Fidicula.	250	40	N.	62	0	1
La más al norte de las dos que están a su lado.	253	40	N.	62	40	4 mayor
La que está más al sur.	253	40	N.	61	0	4 mayor
En medio del comienzo de los cuernos.	262	0	N.	60	0	4
De las dos que continúan hacia el orto, la del norte.	265	20	N.	61	20	4
La que está más al sur.	265	0	N.	60	20	4
De las dos al oeste en la unión, la del norte.	254	20	N.	56	10	3
La más al sur.	254	10	N.	55	0	4 menor
De las dos al este en el mismo grupo, la del norte.	257	30	N.	55	20	3
La que está más al sur.	258	20	N.	54	45	4 menor
De las 10 estrellas, 1 de 1.ª magnitud, 2 de 3.ª, 7 de 4.ª.						
CISNE O AVE						
En el pico.	267	50	N.	49	20	3
En la cabeza.	272	20	N.	50	30	5
En medio del cuello.	279	20	N.	54	30	4 mayor
En el pecho.	291	50	N.	56	20	3
La que luce en la cola.	302	30	N.	60	0	2
En la articulación del ala derecha.	282	40	N.	64	40	3
De las tres que hay en la planta derecha, la más al sur.	285	50	N.	69	40	4
La del medio.	284	30	N.	71	30	4 mayor
La última de las tres y en el extremo del ala.	310	0	N.	74	0	4 mayor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En el codo del ala izquierda.	294	10	N.	49	30	3
En medio de la misma ala.	298	10	N.	52	10	4 mayor
En el extremo de la misma.	300	0	N.	74	0	3
En el pie izquierdo.	303	20	N.	55	10	4 mayor
En la rodilla izquierda.	307	50	N.	57	0	4
La del oeste de las dos que hay en el pie derecho.	294	30	N.	64	0	4
La del este.	296	0	N.	64	30	4
Una más nebulosa, en la rodilla derecha.	305	30	N.	63	45	5

17 estrellas de las que hay 1 de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª, 2 de 5.ª.

Y dos no agrupadas alrededor de Cisne.

La que está más al sur de las dos que hay bajo el ala izquierda.	306	0	N.	49	40	4
La que está más al norte.	307	10	N.	51	40	4

CASIOPEA

En la cabeza.	1	10	N.	45	20	4
En el pecho.	4	10	N.	46	45	3 mayor
En el cinturón.	6	20	N.	47	50	4
Sobre la silla, junto a las piernas.	10	0	N.	49	0	3 mayor
Junto a las rodillas.	13	40	N.	45	30	3
En la pierna.	20	20	N.	47	45	4
En el extremo del pie.	355	0	N.	48	20	4
En el brazo izquierdo.	8	0	N.	44	20	4
En el cúbito izquierdo.	7	40	N.	45	0	5
En el cúbito derecho.	357	40	N.	50	0	6
En el pie de la silla.	8	20	N.	52	40	4
En medio del respaldo.	1	10	N.	51	40	3 menor
En el extremo.	27	10	N.	51	40	6

13 estrellas, de las que hay 4 de 3.ª magnitud, 6 de 4.ª, 1 de 5.ª, 2 de 6.ª.

PERSEO

Una nebulosa en el final de la mano derecha.	21	0	N.	40	30	nebulosa
En el cúbito derecho.	24	30	N.	37	30	4
En el hombro derecho.	26	0	N.	34	30	4 menor
En el hombro izquierdo.	20	50	N.	32	20	4
En la cabeza como una nebula.	24	0	N.	34	30	4
En la escápula.	24	50	N.	31	10	4
La que brilla en el lado derecho.	28	10	N.	30	0	2
De las tres que hay en el mismo lado, la del oeste.	28	40	N.	27	30	4
La del medio.	30	20	N.	27	40	4
La que queda de las tres.	31	0	N.	27	30	3
En el codo izquierdo.	24	0	N.	27	0	4
La que brilla en la mano izquierda y en la cabeza de Medusa.	23	0	N.	23	0	2
La del este de la misma cabeza.	22	30	N.	21	0	4
La del oeste en la misma cabeza.	21	0	N.	21	0	4
La del oeste a ésta.	20	10	N.	22	15	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En la rodilla derecha.	38	10	N.	28	15	4
La del oeste a ésta en la rodilla.	37	10	N.	28	10	4
De las dos que hay en el vientre, la del oeste.	35	40	N.	25	10	4
La del este.	37	20	N.	26	15	4
En el muslo derecho.	37	30	N.	24	30	5
En la pantorrilla derecha.	39	40	N.	28	45	5
En la pierna izquierda.	30	10	N.	21	40	4 mayor
En la rodilla izquierda.	32	0	N.	19	50	3
En la pierna izquierda.	31	40	N.	14	45	3 mayor
En el talón izquierdo.	24	30	N.	12	0	3 menor
En la parte más alta del pie izquierdo.	29	40	N.	11	0	3 mayor

26 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 16 de 4.ª, 2 de 5.ª, 1 nebulosa.

No agrupadas alrededor de Perseo.

La que mira al orto a partir de la rodilla izquierda.	34	10	N.	31	0	5
La que mira al norte a partir de la rodilla derecha.	38	20	N.	31	0	5
La que está delante de la cabeza de Medusa.	18	0	N.	20	40	oscura

De las 3 estrellas, 2 de 5.ª magnitud, 1 oscura.

EL COCHERO O EL AURIGA

La más al sur de las dos que hay en la cabeza.	55	50	N.	30	0	4
La que está más al norte.	55	40	N.	30	50	4
La que brilla en el hombro izquierdo, a la que llaman Cabra.	78	20	N.	22	30	1
En el hombro derecho.	56	10	N.	20	0	2
En el codo derecho.	54	30	N.	15	15	4
En el ala derecha.	56	10	N.	13	30	4 mayor
En el codo izquierdo.	45	20	N.	20	40	4 mayor
La del oeste de las cabrillas.	45	30	N.	18	0	4 menor
En el ala izquierda de las cabrillas, la del este.	46	0	N.	18	0	4 mayor
En la pantorrilla izquierda.	53	10	N.	10	10	3 menor
En la pantorrilla derecha y en el extremo del cuerno de Tauro al N.	49	0	N.	5	0	3 mayor
En el tobillo.	49	20	N.	8	30	5
En la nalga.	49	40	N.	12	20	5
Una pequeña en el pie izquierdo.	24	0	N.	10	20	6

14 estrellas, de las cuales 1 de 1.ª magnitud, 1 de 2.ª, 2 de 3.ª, 7 de 4.ª, 2 de 5.ª, 1 de 6.ª.

OFIUCO O SERPENTERIO

En la cabeza.	228	10	N.	36	0	3
De las dos que hay en el hombro derecho, la del oeste.	231	20	N.	27	15	4 mayor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La del este.	232	20	N.	26	45	4
De las dos que hay en el hombro izquierdo, la del oeste.	216	40	N.	33	0	4
La del este.	218	0	N.	31	50	4
En el codo izquierdo.	211	40	N.	34	30	4
De las dos que hay en la mano izquierda, la del oeste.	208	20	N.	17	0	4
La del este.	209	20	N.	12	30	3
En el codo derecho.	220	0	N.	15	0	4
La del oeste en la mano derecha.	205	40	N.	18	40	4 menor
La del este.	207	40	N.	14	20	4
En la rodilla derecha.	224	30	N.	4	30	3
En la tibia.	227	0	N.	2	15	3 mayor
De las cuatro que hay en el pie derecho, la del oeste.	226	20	N.	2	15	4 mayor
La del este.	227	40	N.	1	30	4 mayor
Al este de la 3.ª.	228	20	N.	0	20	4 mayor
La que queda al este.	229	10	N.	0	45	5 mayor
La que toca el talón.	229	30	N.	1	0	5
En la rodilla izquierda.	215	30	N.	11	50	3
De las tres que hay en la pierna izquierda, en línea recta la de N.	215	0	N.	5	20	5 mayor
La del medio.	214	0	N.	3	10	5
La de más al sur.	213	0	N.	1	40	5 mayor
En el talón izquierdo.	215	40	N.	0	40	5
La que toca la zapatilla del pie izquierdo.	214	0	N.	0	45	4

24 estrellas, de las que 5 son de 3.ª magnitud, 13 de 4.ª, 6 de 5ª.

No agrupadas alrededor de Ofiuco.

Desde el orto hacia el hombro derecho, la más al norte de las 3.	235	20	N.	28	10	4
La del medio de las 3.	236	0	N.	26	20	4
La del sur de las tres.	233	40	N.	25	0	4
La que aquí sigue a las 3.	237	0	N.	27	0	4
Una, separada de las cuatro, hacia el norte.	238	0	N.	33	0	4

De las no agrupadas, todas son de cuarta magnitud.

LA SERPIENTE DE OFIUCO

En el cuadrilátero la que está en la mejilla.	192	10	N.	38	0	4
La que toca la nariz.	201	0	N.	40	0	4
En la sien.	197	40	N.	35	0	3
En la salida del cuello.	195	20	N.	34	15	3
La del medio del cuadrilátero y en la cara.	194	40	N.	37	15	4
A partir de la cabeza hacia el norte.	201	30	N.	42	30	4
En la primera vuelta del cuello.	195	0	N.	29	15	3
La más al norte de las tres que están al este.	198	10	N.	26	30	4
La del medio.	197	40	N.	25	20	3

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La más al sur de las tres.	199	40	N.	24	0	3
La del oeste, de las dos que hay en la izquierda de Serpentario.	202	0	N.	16	30	4
La del este a ésa, en la misma mano.	211	30	N.	16	15	5
La que está después del muslo derecho.	227	0	N.	10	30	4
La del norte, de las dos del este.	230	20	N.	8	30	4 mayor
La del norte.	231	10	N.	10	30	4
Detrás de la mano derecha en la inflexión de la cola.	237	0	N.	20	0	4
La del este en la cola.	242	0	N.	21	10	4 mayor
En la punta de la cola.	251	40		27	0	4
18 estrellas, de las que 5 son de 3.ª magnitud, 12 de 4.ª y 1 de 5.ª.						
SAGITA O FLECHA						
En la cúspide.	273	30	N.	39	20	4
De las tres que hay en la flecha, la del este.	270	0	N.	39	10	6
La mediana de ellas.	269	10	N.	39	50	5
La del oeste.	268	0	N.	39	0	5
En la muesca de atrás.	266	40	N.	38	45	5
5 estrellas, de las que 1 es de 4.ª magnitud, 3 de 5.ª, 1 de 6.ª.						
ÁGUILA						
En medio de la cabeza.	270	30	N.	26	50	4
En el cuello.	268	10	N.	27	10	3
La que brilla en las espaldas, a la que llaman Águila.	267	10	N.	29	10	2 mayor
La próxima a ésta, más al norte.	268	0	N.	30	0	3 menor
La del oeste, en el hombro izquierdo.	266	30	N.	31	30	3
La del este.	269	20	N.	31	30	5
La del oeste en el hombro derecho.	263	0	N.	28	40	5
La del este.	264	30	N.	26	40	5 mayor
La que toca el círculo lácteo, en la cola.	255	30	N.	26	30	3
9 estrellas, de las que 1 es de 2.ª magnitud, 4 de 3.ª, 1 de 4.ª, 3 de 5.ª.						
No agrupadas alrededor de Águila.						
La del oeste, partiendo de la cabeza, al sur.	272	0	N.	21	40	3
La del este.	272	10	N.	29	10	3
Partiendo del hombro derecho hacia Africo.	259	20	N.	25	0	4 mayor
Hacia el sur.	261	30	N.	20	0	3
Más hacia el sur.	263	0	N.	15	30	5
La más al oeste de todas.	254	30	N.	18	10	3
6 no agrupadas, de las que 4 son de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª y 1 de 5.ª.						
DELFÍN						
De las tres que hay en la cola, la del oeste.	281	0	N.	29	10	3 menor
De las otras dos, la del oeste hacia	282	0	N.	29	0	4 menor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
La más al sur.	282	0	N.	26	40	4
La más al sur del lado al oeste en el romboide.	281	50	N.	32	0	3 menor
La más al norte del mismo lado.	283	30	N.	33	50	3 menor
La más al sur del lado siguiente.	284	40	N.	32	0	3 menor
La más al norte del mismo lado.	286	50	N.	33	10	3 menor
De las tres que hay entre la cola y el rombo, la más al sur.	280	50	N.	34	15	6
De las otras dos, la del oeste hacia el norte.	280	50	N.	31	50	6
La del este.	282	20	N.	31	30	6

10 estrellas, 5 de 3.ª magnitud, 2 de 4.ª, 3 de 6.ª.

SECCIÓN DEL CABALLO

De las dos que hay en la cabeza, la del oeste.	289	40	N.	20	30	oscura
La del este.	292	20	N.	20	40	oscura
La del oeste de las dos que hay en la cabeza	289	40	N.	25	30	oscura
La del este.	291	0	N.	25	0	oscura.

4 estrellas, todas oscuras.

CABALLO ALADO O PEGASO

En la abertura de la boca.	298	40	N.	21	30	3 mayor
La que está más al N, de las dos más cercanas en la cabeza.	302	40	N.	16	50	3
La que está más al sur.	301	20	N.	16	0	4
La que está más al sur de las dos que hay en la crin.	314	40	N.	15	0	5
La que está más al norte.	313	50	N.	16	0	5
De las dos que hay en la cerviz, la del oeste.	312	10	N.	18	0	3
La del este.	313	50	N.	19	0	4
En el jarrete izquierdo.	305	40	N.	36	40	4 mayor
En la rodilla izquierda.	311	0	N.	34	15	4 mayor
En el jarrete derecho.	317	0	N.	41	10	4 mayor
La del oeste de las dos contiguas en el pecho.	319	30	N.	29	0	4
La del este.	320	20	N.	29	30	4
La del N de las dos que hay en la rodilla derecha.	322	20	N.	35	0	3
La del sur.	321	50	N.	24	30	5
La que está más al N de las 2 que hay en el cuerpo bajo el ala.	327	50	N.	25	40	4
La que está más al sur.	328	20	N.	25	0	4
En las espaldas y la juntura del ala.	350	0	N.	19	40	2 menor
En el hombro derecho y en la salida de la pata.	325	30	N.	31	0	2 menor
En el extremo del ala.	335	30	N.	12	30	2 menor

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En el ombligo, una que también es común con la cabeza de Andrómeda.	341	10	N.	26	0	2 menor
20 estrellas, 4 de 2.ª magnitud, 4 de 3.ª, 9 de 4.ª, 3 de 5.ª.						
ANDRÓMEDA						
La que está en la espalda.	348	40	N.	24	30	3
En el hombro derecho.	349	40	N.	27	0	4
En el hombro izquierdo.	347	40	N.	23	0	4
La más al sur de las tres que hay en el brazo derecho.	347	0	N.	32	0	4
La más al norte.	348	0	N.	33	30	4
La del medio de las tres.	348	20	N.	32	20	5
La más al S de las 3 que hay en la parte mayor de la mano derecha.	343	0	N.	41	0	4
La del medio de ellas.	344	0	N.	42	0	4
La más al norte.	345	30	N.	44	0	4
En el brazo izquierdo.	347	30	N.	17	30	4
En el codo izquierdo.	349	0	N.	15	50	3
La del sur de las tres que hay en el cinturón.	357	10	N.	25	20	3
La mediana.	355	10	N.	30	0	3
La del norte de las tres.	355	20	N.	32	30	3
En el pie izquierdo.	10	10	N.	23	0	3
En el pie derecho.	10	30	N.	37	20	4 mayor
La más al sur de ellas.	8	30	N.	35	0	4 mayor
La que está al norte, de las dos que hay bajo la cara.	5	40	N.	29	20	4
La que está al sur.	5	20	N.	28	0	4
En la rodilla derecha.	5	30	N.	35	30	5
La más al norte de las dos que hay en la túnica.	6	0	N.	34	30	5
La más al sur.	7	30	N.	32	30	5
La que sale de la mano derecha, no agrupada.	5	0	N.	44	0	3
23 estrellas, 7 de 3.ª, 12 de 4.ª, 4 de 5.ª.						
TRIÁNGULO						
En el vértice del triángulo.	4	20	N.	16	30	3
De las 3 que hay en la base del triángulo, la del oeste.	9	20	N.	20	40	3
La del medio.	9	30	N.	20	20	4
De las tres, la de este.	10	10	N.	19	0	3
4 estrellas, 3 de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª.						

Así pues, en esta región septentrional, hay en total 360 estrellas: 3 son de 1.ª magnitud, 18 de 2.ª, 81 de 3.ª, 177 de 4.ª, 58 de 5.ª, 13 de 6.ª, 1 nebulosa y 9 oscuras.

De las que están en medio y alrededor del círculo del zodíaco

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
ARIES						
De las dos que hay en el cuerno la del oeste, que es la 1.ª de todas.	0	0	N.	7	20	3 menor
La del este en los cuernos.	1	0	N.	8	20	3
De las dos que hay en la abertura de la boca, la del norte.	4	20	N.	7	40	5
La que está más al sur.	4	50	N.	6	0	5
En la cerviz.	9	50	N.	5	30	5
En la nariz.	10	50	N.	6	0	6
La que está en el principio de la cola.	14	40	N.	4	50	5
De las tres que hay en la cola, la del oeste.	17	10	N.	1	40	4
La del medio.	18	40	N.	2	30	4
La que está al este.	20	20	N.	1	50	4
En el muslo.	13	0	N.	1	10	5
En la corva.	11	20	N.	1	30	5
En el extremo del pie posterior.	8	10	N.	5	15	4 mayor

13 estrellas, de las que 2 son de 3.ª magnitud, 4 de 4.ª, 6 de 5.ª, 1 de 6.ª.

No agrupadas alrededor de Aries.

La que brilla sobre la cabeza.	3	50	N.	10	0	3 mayor
La más al sur sobre la espalda.	15	0	N.	10	10	4
La del norte de las otras tres pequeñas.	14	40	N.	12	40	5
La mediana.	13	0	N.	10	40	5
La del sur.	12	30	N.	10	40	5

5 estrellas, 1 de 3.ª magnitud, 1 de 4.ª, 5 de 5.ª.

TAURO

La más al norte de las cuatro que hay en el corte.	19	40	sur	6	0	4
La después de ésa.	19	20	sur	7	15	4
La tercera.	18	0	sur	8	30	4
La cuarta, la más al sur.	17	50	sur	9	15	4
En la articulación derecha.	23	0	sur	9	30	5
En el pecho.	27	0	sur	8	0	3
En la rodilla derecha.	30	0	sur	12	40	4
En el corvejón derecho.	26	20	sur	14	50	4
En la rodilla izquierda.	35	30	sur	10	0	4
En el corvejón izquierdo.	36	20	sur	13	30	4
De las cinco que hay en la cara, a las que llaman Succulas, la que está en la nariz.	32	0	sur	5	45	3 menor
Entre ésta y el ojo que está al norte.	33	40	sur	4	15	3 menor
Entre la misma y el ojo que está al sur.	34	10	sur	0	50	3 menor
La que brilla en el mismo ojo, llamada por los romanos Palilicium.	36	0	sur	5	10	1

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
En el ojo del norte.	35	10	sur	3	0	3 menor
La que está al sur entre el comienzo del cuerno y la oreja.	40	30	sur	4	0	4
La más al sur de las dos que hay en el mismo cuerno.	43	40	sur	5	0	4
La que está más al norte.	43	20	sur	3	30	5
En el extremo del mismo.	50	30	sur	2	30	3
La del norte en el comienzo del cuerno.	49	0	sur	4	0	4
En el extremo del mismo, y que está en el pie derecho de Cochero.	49	0	N.	5	0	3
De las dos que hay en la oreja del norte, la que está al norte.	35	20	N.	4	30	5
De ésas, la más al sur.	35	0	N.	4	0	5
De las dos pequeñas que hay en la cerviz, la del oeste.	30	20	N.	0	40	5
La del este.	32	20	N.	1	0	6
La más al sur de las del oeste en el cuello del cuadrilátero.	31	20	N.	5	0	5
La más al norte del mismo lado.	32	10	N.	7	10	5
La más al sur del lado este.	35	20	N.	3	0	5
La más al norte de ese mismo lado.	35	0	N.	5	0	5
El término norte del lado al oeste de las Pléyades.	25	30	N.	4	30	5
Del mismo lado el término sur.	25	50	N.	4	40	5
El término más extremo del este de las Pléyades.	27	0	N.	5	20	5
La más pequeña de las Pléyades y cortadas por los extremos.	26	0	N.	3	0	5

32 estrellas, y además de la que está en el extremo del cuerno del norte, 1 es de 1.ª magnitud, 6 de 3.ª, 11 de 4.ª, 13 de 5.ª, 1 de 6.ª.

Las no agrupadas que están alrededor de Tauro.

Entre el pie y la articulación de abajo.	18	20	sur	17	30	4
De las 3 que hay alrededor del cuerno del N, la del oeste.	43	20	sur	2	0	5
La del medio de las tres.	47	20	sur	1	45	5
La del este.	49	20	sur	2	0	5
De las 2 que hay en el extremo del mismo cuerno, la del norte.	52	20	sur	6	20	5
La del sur.	52	20	sur	7	40	5
De las 5 que hay en el cuerno del norte, la que va delante.	50	20	N.	2	40	5
La otra del este.	52	20	N.	1	0	5
La tercera del este.	54	20	N.	1	20	5
De las dos que quedan la que está al norte.	55	40	N.	3	20	5
La que está al sur.	56	40	N.	1	15	5

De las 11 estrellas no agrupadas, 1 de 4.ª magnitud, 10 de 5.ª.

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'		*Latitud* °	'	*Magnitud*
GÉMINIS						
En la cabeza al oeste de Géminis, Castor.	76	40	N.	9	30	2
Una roja en la cabeza al este de Géminis, Polux.	79	50	N.	6	15	2
En el codo izquierdo del Gemelo del oeste.	70	0	N.	10	0	4
En el mismo brazo.	72	0	N.	7	20	4
En la espalda del mismo Gemelo.	75	20	N.	5	30	4
En el hombro derecho del mismo.	77	20	N.	4	50	4
En el hombro izquierdo del Gemelo del este.	80	0	N.	2	40	4
En el lado derecho del Gemelo del oeste.	75	0	N.	2	40	5
En el lado izquierdo del Gemelo del este.	76	30	N.	3	0	5
En la rodilla izquierda del Gemelo del oeste.	66	30	N.	1	30	3
En la rodilla izquierda del Gemelo del este.	71	35	sur	2	30	3
En la ingle izquierda del mismo.	75	0	sur	0	30	3
En la cavidad derecha del mismo.	74	40	sur	0	40	3
La del oeste en el pie del Gemelo del oeste.	60	0	sur	1	30	4 mayor
La del este en el mismo pie.	61	30	sur	1	15	4
En el extremo del pie del Gemelo del oeste.	63	30	sur	3	30	4
En la parte alta del pie del este.	65	20	sur	7	30	3
En la parte baja del mismo pie.	68	0	sur	10	30	4
18 estrellas, de las que 2 son de 2.ª magnitud, 5 de 3.ª, 9 de 4.ª, 2 de 5.ª.						
Estrellas no agrupadas alrededor de Géminis.						
Una al oeste a partir de la parte alta del pie del Gemelo del oeste.	57	30	sur	0	40	4
Una que brilla al oeste de la rodilla del mismo.	59	50	N.	5	50	4 mayor
Una del oeste de la rodilla izquierda del Gemelo del este.	68	30	sur	2	15	5
De las tres del este, de la mano derecha del Gemelo del este, la del norte.	81	40	sur	1	20	5
La del medio.	79	40	sur	3	20	5
De las dos que hay alrededor del brazo derecho, la del sur.	79	20	sur	4	30	5
Una lúcida que va detrás de las tres.	84	0	sur	2	40	4
7 estrellas no agrupadas, 3 de magnitud 4.ª y 4 de 5.ª.						
CÁNCER						
Una nebulosa en medio del pecho que se llama Praesepe.	93	40	N.	0	40	nebulosa
De las dos al oeste del cuadrilátero, la más al norte.	91	0	N.	1	15	4 menor
La más al sur.	91	20	sur	1	10	4 menor
De las dos del este, a las que se llama Asnos, la más al norte.	93	40	N.	2	40	4 mayor
La Asinus al sur.	94	40	sur	0	10	4 mayor
En la pinza o brazo del sur.	99	50	sur	5	30	4

(continuación)

Agrupaciones de estrellas	*Longitud* °	'	*Latitud*	°	'	*Magnitud*
En el brazo del norte.	91	40	N.	11	50	4
En el extremo del pie del norte.	86	0	N.	1	0	5
En el extremo del pie del sur.	90	30	sur	7	30	4 mayor

De las 9 estrellas, 7 de 4.ª magnitud, 1 de 5.ª, 1 nebulosa.

No agrupadas alrededor de Cáncer.

Cheles, «Pinza» al sur sobre el codo.	103	0	sur	2	40	4 menor
Cheles, «Pinza» al este desde el extremo del mismo.	105	0	sur	5	40	4 menor
La del oeste de las dos sobre una nubecilla.	97	20	N.	4	50	5
La del este de la anterior.	100	20	N.	7	15	5

De las 4 no agrupadas, 2 de 4.ª, 4 de 5.ª.

LEO

En las narices.	101	40	N.	10	0	4
En la boca.	104	30	N.	7	30	4
De las dos que hay en la cabeza, la del norte.	107	40	N.	12	0	3
La del sur.	107	30	N.	9	30	3 mayor
De las tres que hay en la cerviz, la del norte.	113	30	N.	11	0	3
La del medio.	115	30	N.	8	30	2
De las tres, la del sur.	114	0	N.	4	30	3
En el corazón, la que llaman Basilisco o Regulo.	115	50	N.	0	10	1
De las dos que hay en el pecho, la del sur.	116	50	sur	1	50	4
La que está un poco al oeste de la que está en el corazón.	113	20	sur	0	15	5
En la rodilla derecha del oeste.	110	40	sur	0	0	5
En la muñeca derecha.	117	30	sur	3	40	6
En la rodilla izquierda anterior.	122	30	sur	4	10	4
En la muñeca izquierda.	115	50	sur	4	15	4
En la axila izquierda.	112	30	sur	0	10	4
De las tres que hay en el vientre, la del oeste.	120	20	N.	4	0	6
La más al norte de las dos del este.	126	20	N.	5	20	6
La que está más al sur.	125	40	N.	2	20	6
De las dos que hay en el lomo, la del oeste.	124	40	N.	12	15	5
La del este.	127	30	N.	13	40	2
De las dos que hay en la grupa, la más al norte.	127	40	N.	11	30	5
La más al sur.	129	40	N.	9	40	3
En el muslo posterior.	133	40	N.	5	50	3
En la cavidad.	135	0	N.	1	15	4
En el codo posterior.	135	0	sur	0	50	4
En el pie posterior.	134	0	sur	3	0	5
En el extremo de la cola.	137	50	N.	11	50	1 menor

De las 27 estrellas, 2 de la 1.ª magnitud, 2 de 2.ª, 6 de 3.ª, 8 de 4.ª, 5 de 5.ª, 4 de 6.ª.

Este libro que el lector tiene en sus manos es una pieza única por su contenido y por quien lo ha compilado. En efecto, el gran científico Stephen Hawking ha reunido en él, por primera vez en la historia de la edición, las cinco obras que a su juicio representan el canon de la cultura universal en el campo de la Física y la Astronomía y ha escrito una introducción a cada una, explicando lo que han significado para la ciencia, vinculándolas entre sí y ofreciéndonos cinco soberbios retratos de los genios que las escribieron:

* Nicolás Copérnico, *Sobre las revoluciones de los orbes celestes*
* Galileo Galilei, *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*
* Johannes Kepler, *Las armonías del mundo*
* Isaac Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural*
* Albert Einstein, *El principio de la relatividad*

En su conjunto, estas obras, escritas por los mayores pensadores de la historia de la Humanidad, constituyen un tesoro de conocimientos científicos que nadie puede ignorar. Son las piedras miliares de la ciencia moderna que nos enseñan cómo cada uno de los grandes hombres que las escribieron construyó sus teorías a partir de las contribuciones geniales de sus predecesores, en una cadena de gigantes de la inteligencia que llega hasta nuestros días con el propio Stephen Hawking, el gran físico teórico inglés autor de los best-sellers mundiales *Historia del tiempo* y *El universo en una cáscara de nuez*.

967740-1
9 788484 324355